

SÉRIE A, N° 1925
N° D'ORDRE : 2792

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MARC COURTAND

1^{re} THÈSE. — Sur les Courbes gauches du troisième et du quatrième ordre en Géométrie finie.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

Disp. Soutenance
I. M. 16 Sept 1939

MM. MONTEL, *Président.*

PERÈS

BOULIGAND

} *Examineurs.*

PARIS

HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne

1940

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MARC COURTAND

1^{re} THÈSE. — Sur les Courbes gauches du troisième et du quatrième ordre en Géométrie finie.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le _____, devant la Commission d'examen.

MM. MONTEL, *Président.*

PERÈS
BOULIGAND } *Examineurs.*

PARIS

HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne

1940

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . M. MOLLIARD.

Doyen C. MAURAIN, *Professeur, Physique du Globe*

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.
Emile PICARD.
Léon BRILLOUIN.
PÉCHARD.
FREUNDLER.
AUGER.
RANGEARD.

LESPIEAU.
MARCHIS.
VESSIOT.
PORTIER.
MOLLIARD.
LAPICQUE.
G. BERTRAND.

ABRAHAM.
Ch. FABRY.
Léon BERTRAND.
WINTREBERT.
DUBOSQ.
BOHN.
RABAUD.



PROFESSEURS

M. CAULLERY . . . T Zoologie (Evolution des êtres organisés).
Emile BOREL . . . T Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN . . . T Chimie physique.
E. CARTAN . . . T Géométrie supérieure.
A. COTTON . . . T Recherches physiques.
J. DRACH . . . T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ . . T Zoologie.
M. GUICHARD . . T Analyse et mesures chimiques.
Paul MONTEL . . T Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
L. BLARINGHEM . T Botanique.
G. JULIA T Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN . . . T Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY . T Pétrographie.
A. DENJOY . . . T Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD T Géographie physique et Géologie dynamique.
Eugène BLOCH . . T Physique.
G. BRUHAT . . . T Physique théorique et Physique céleste.
E. DARMOIS . . . T Enseignement de Physique.
A. DEBIERRE . . T Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR T Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER . . . T Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND T Botanique.
M. JAVILLIER . . T Chimie biologique.
ROBERT-LÉVY . . T Physiologie comparée.
Henri VILLAT . . T Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB T Géologie.
P. PASCAL T Chimie générale.
M. FRÉCHET . . . T Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON . . T Astronomie.
M^{me} RAMART-LUCAS T Chimie organique.
H. BÉGHIN T Mécanique physique et expérimentale.

FOCH T Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER . . . Physique (P. C. B.).
De BROGLIE . . . T Théories physiques.
CHRÉTIEN Optique appliquée.
P. JOB Chimie générale.
LABROUSTE . . . Physique du Globe.
PRENANT T Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY Mécanique physique et expérimentale.
COMBES T Physiologie végétale.
GARNIER T Mathématiques générales.
PÈRÈS Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL T Chimie minérale.
LAUGIER T Physiologie générale.
TOUSSAINT Technique Aéronautique.
M. CURIE Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD T Hautes températures.
CHAZY T Mécanique rationnelle.
GAULT Chimie (P. C. B.).
CROZE Recherches physiques.
DUPONT T Théories chimiques.
LANQUINE T Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON Mathématiques générales.
BARRABÉ Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN Théories physiques.
VAVON Chimie organique.
G. DARMOIS . . . Calcul des probabilités et Physique mathématique.
CHATTON T Biologie maritime.
AUBEL Chimie biologique.
J. BOURCART . . . Géographie physique et Géologie dynamique.
M^{me} JOLIOT-CURIE . Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL Biologie végétale (P. C. B.).
CABANNES Enseignement de Physique.
GRASSÉ Biologie animale (P. C. B.).
PRÉVOST Chimie (P. C. B.).
BOULIGAND Mathématiques.
CHAUDRON Chimie (P. C. B.).

Secrétaire A. PACAUD.

Secrétaire honoraire . . D. TOMBECK



INTRODUCTION

L'ÉTUDE des courbes de JORDAN a permis de généraliser au cours du dernier demi-siècle la notion élémentaire de courbe ou ligne qui relie deux points. On a ainsi introduit à côté des courbes algébriques des courbes non algébriques et même non analytiques. C. JUEL a cherché les propriétés communes à ces courbes soumises à quelques hypothèses restrictives dont la principale est d'avoir un *ordre borné*, c'est-à-dire de rencontrer une droite quelconque de leur plan (ou un plan quelconque de l'espace pour une courbe gauche) en un nombre borné de points réels.

Ces travaux dont M. P. MONTEL a fait un exposé très détaillé (1) ont été suivis en France de ceux de M. A. MARCHAUD et ceux de M. G. BOULIGAND et ses élèves. M. MARCHAUD a appliqué la notion d'ordre à des ensembles continus de points ; nous aurons fréquemment l'occasion de nous appuyer sur ses résultats. M. BOULIGAND a posé les bases de la Géométrie infinitésimale directe (2).

Dans ce mémoire, nous nous placerons comme l'a fait JUEL dans l'espace projectif, mais au lieu de courbes constituées par la réunion d'arcs élémentaires nous étudierons des courbes gauches continues possédant en chacun de leurs points une tangente et un plan osculateur uniques qui varient continuellement. La première partie traite

(1) P. MONTEL, Sur la Géométrie finie et les travaux de C. JUEL. *Bull. des Sc. Math.*, 1924, vol. 48, p. 109.

(2) G. BOULIGAND, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*. Paris, Vuibert, 1932.

des courbes du troisième ordre, la deuxième des courbes du quatrième ordre.

La méthode utilisée est une méthode projective et ramène à l'étude de courbes planes du troisième ordre à tangente partout qui sont des courbes élémentaires au sens de JUEL comme nous l'indiquons au chapitre I après avoir rappelé les résultats trouvés par JUEL pour la courbe gauche du troisième ordre.

Au chapitre II, nous étudions la surface développable circonscrite à la courbe dont la propriété essentielle a été donnée par JUEL et nous précisons la forme des sections planes de cette surface : Si le plan rencontre la cubique en trois points, la section est une quartique à trois rebroussements sans tangente double ; si le plan rencontre la courbe gauche en un point, la section est une quartique à pointe qui admet une tangente double.

Au chapitre III, nous établissons la propriété essentielle de la droite commune à deux plans osculateurs ; cette droite est bitangente à la développable, et nous démontrons pour notre courbe une propriété qui avait été établie par JOACHIMSTHAL et CREMONA pour la cubique algébrique : les plans qui rencontrent la courbe en trois points ne contiennent pas de droite commune à deux plans osculateurs ; ceux qui la rencontrent en un point contiennent une telle droite et une seule.

Les chapitres suivants sont consacrés à des exemples de courbes du troisième ordre : ces courbes sont obtenues comme intersection de surfaces et les surfaces les plus simples pour un tel objet sont les surfaces réglées du second ordre (1) ; elles se réduisent aux quadriques réglées et au cône convexe.

Le chapitre IV établit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe tracée sur un hyperboloïde à une nappe ou sur un cône convexe soit du troisième ordre.

Le chapitre V donne des exemples de courbes du troisième ordre tracées sur des surfaces algébriques : courbe algébrique du 7^e degré et courbe tracée sur une surface réglée du second degré (1).

Une courbe du troisième ordre plus générale s'obtient par l'intersection de deux cônes du second ordre. Nous avons reporté son étude

(1) Le mot *ordre* est pris ici, comme dans tout le mémoire, au sens d'*ordre réel*. Par opposition, le *degré* est algébrique.

dans une note, à la fin du mémoire parce qu'elle n'est pas entièrement projective comme les exemples précédemment énumérés.

Au chapitre VI, nous effectuons le prolongement d'un arc du troisième ordre par une méthode différente de celle qu'a donnée M. O. HAUPT pour ce problème.

Le chapitre I de la deuxième partie précise la définition de la courbe du quatrième ordre. La méthode qui permettra l'étude de cette courbe consiste principalement dans l'examen de la correspondance qui lie les deux points de la courbe situés dans un de ses plans osculateurs. Cette correspondance permet d'établir les théorèmes généraux donnés au chapitre II et en particulier le second de ces théorèmes qui caractérise un arc élémentaire sur la courbe. On peut ainsi pour chaque type de courbe du quatrième ordre trouver le nombre des plans stationnaires, étudier les trisécantes et dénombrer les arcs élémentaires qui constituent la courbe. Ces résultats sont établis au chapitre III pour la courbe sans trisécante, aux chapitres IV et V pour les courbes à trisécantes ordinaires et de contact, au chapitre VI pour la courbe à point double et la courbe à pointe.

Les types de courbes du troisième et du quatrième ordres que nous avons obtenus présentent les mêmes caractères généraux que les courbes du troisième et du quatrième degrés. Cette analogie avec les courbes algébriques apparaît d'une manière particulièrement saisissante dans un dernier chapitre où nous étudions la courbe du quatrième ordre à trisécantes ordinaires. JUEL avait supposé dans un but de commodité, cette courbe tracée sur un hyperboloïde à une nappe en vue d'obtenir plus facilement ses propriétés dans ce cas particulier. Nous montrons que la courbe à trisécantes ordinaires est toujours tracée sur une quadrique réglée, et nous mettons ainsi en évidence que JUEL a étudié à son insu cette courbe dans le cas général. Elle apparaît comme la généralisation de la quartique algébrique commune à un hyperboloïde et à une surface du troisième degré contenant deux génératrices de la quadrique.

La note qui termine ce travail expose comment on peut construire deux cônes convexes ayant en commun une génératrice et une courbe du troisième ordre. Les directrices de ces cônes sont des ovales *cosécants* que nous définissons après avoir établi quelques propriétés des ovales d'ordre cyclique $2n$ au sens de M. MARCHAUD.

Notre définition fait intervenir des propriétés métriques, aussi avons-nous séparé cet exemple des courbes projectives données au chapitre V de la première partie.

Les principaux résultats contenus dans ce mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences (1) (séance du 11 janvier 1937).

* * *

J'exprime ici ma respectueuse gratitude à M. Paul MONTEL, Membre de l'Institut, pour m'avoir orienté dans le choix de ce travail et m'avoir apporté, avec sa bienveillance habituelle, l'aide de ses précieux conseils. Je remercie M. Georges BOULIGAND, Membre Correspondant de l'Institut, de l'intérêt qu'il a manifesté à cette thèse et des améliorations qu'il m'a suggérées pour la rédaction, ainsi que M. Joseph PÉRÈS pour avoir bien voulu faire partie de mon jury. Qu'il me soit également permis d'adresser à M. André MARCHAUD, Recteur de l'Académie de Clermont-Ferrand, mes remerciements pour les encouragements qu'il m'a envoyés.

(1) M. COURTAND, « Sur les courbes gauches du troisième ordre ». *C. R. des séances de l'Ac. des Sc.*, 11 janvier 1937, t. 204, p. 82, et « Sur les courbes gauches du quatrième ordre ». *C. R.*, 25 janvier 1937, t. 204, p. 215.



PREMIÈRE PARTIE

Les courbes gauches du Troisième ordre

CHAPITRE I.

Définitions et hypothèses.

1. — Nous considérons une courbe gauche de JORDAN réelle et projectivement fermée ; le point qui la décrit est lié par une correspondance continue et bi-univoque au point qui parcourt une circonférence. Tout plan la rencontre en trois points au plus. Faisons l'hypothèse qu'en un point quelconque M la tangente et le plan osculateur sont uniques : dès lors une sécante qui rencontre la courbe en deux points voisins de M a pour position limite la tangente lorsque ces deux points tendent le long de la courbe vers le point M ; le plan osculateur est de même la limite d'un plan qui a sur la courbe trois points voisins de M quand ces trois points tendent le long de la courbe vers le point M (1). Il résulte des travaux de M. MARCHAUD (2) que cette tangente et ce plan osculateur varient continuellement.

Tout plan qui rencontre la courbe en trois points distincts la traverse en chacun de ces points (2). Un plan tangent la traverse en un point distinct de son point de contact. Un plan osculateur la traverse au point d'osculatation et n'a pas d'autre point sur elle. Nous

(1) Ces définitions de la tangente et du plan osculateur n'ont pu être conservées pour la courbe du 4^e ordre, à cause de la présence éventuelle d'une pointe sur la courbe. Voir n° 26.

(2) A. MARCHAUD, Sur les continus d'ordre borné. *Acta Math.*, vol. 55, 1930, p. 79.

compterons pour deux le point de contact d'un plan tangent, pour trois un point d'osculution. Un plan quelconque rencontre alors la courbe en un ou trois points.

2. — La perspective de la courbe sur un plan quelconque à partir d'un point de vue extérieur à elle [situé sur elle] est une courbe plane du troisième ordre [du second ordre]. Elle admet en tout point une tangente unique qui est la trace d'un plan tangent à la courbe gauche mené par le point de vue O ou la trace du plan osculateur en O .

M. MARCHAUD a démontré qu'un arc borné plan du troisième ordre est formé de quatre arcs convexes au plus placés bout à bout (1). Nous considérerons comme convexe un arc qui va à l'infini et qui est la perspective d'un arc convexe borné. Dans ces conditions, nous allons montrer qu'une courbe plane du troisième ordre projectivement fermée à tangente partout est constituée par trois arcs convexes placés bout à bout.

Cette courbe a trois points à l'infini au plus. On peut isoler sur elle un arc $\alpha\beta$ qui contient un point à l'infini et qui est la perspective d'un arc borné du troisième ordre. On décompose ainsi la courbe en un nombre fini d'arcs du troisième ordre constitués chacun par quatre arcs convexes au plus. La courbe est donc formée par la réunion d'un nombre fini d'arcs convexes. Ces arcs admettent une tangente partout, donc la courbe, qui est projectivement fermée, est une courbe élémentaire au sens de JUEL qui a au plus trois points d'inflexion. Quand elle a exactement trois inflexions elle ne présente pas d'autre singularité et elle est constituée par la réunion de trois arcs élémentaires, car une courbe fermée complètement continue sans pointe, point double ni tangente double qui possède s points d'inflexion est formée de s arcs élémentaires placés bout à bout (2).

Si la courbe a un point double, elle a un point d'inflexion. Le point double la divise en deux pseudo-branches dont l'une est paire.

(1) A. MARCHAUD, Mém. cité, p. 88.

(2) C. JUEL, Einleitung in die Theorie der Ebenen Elementarkurven Dritter und Vierter Ordnung. *Mém. de l'Ac. Roy. des Sc. et des Let. de Danemark*. 7^e série, Sect. des Sc., t. XI, n^o 2, 1914, p. 131.

On mène du point d'inflexion une tangente à cette pseudo-branche. Son point de contact et le point d'inflexion déterminent sur la courbe deux arcs convexes car une tangente en un point quelconque de l'un de ces arcs ne rencontre plus cet arc.

Dans le cas où la courbe a un rebroussement elle a aussi une inflexion. Un petit raccordement qui fait disparaître le rebroussement donne une courbe du troisième ordre à trois inflexions composée de trois arcs convexes dont l'un a ses extrémités aussi voisines qu'on le veut du rebroussement. On en conclut que la courbe à point de rebroussement est constituée par deux arcs convexes, (au sens précédent).

L'*index* de la courbe gauche (nombre minimum de points situés dans un plan quelconque) est égal à un . Ce résultat découle immédiatement du fait que la perspective de la courbe est un ovale quand le point de vue est sur elle.

Si la courbe gauche se décompose en plusieurs branches projectivement indépendantes, elle est constituée comme l'a indiqué JUEL (1) par trois lignes droites ou une ligne droite et une courbe plane du deuxième ordre. Nous écarterons ces cas et nous supposons la courbe composée d'une seule branche au sens projectif. Nos hypothèses sur la tangente, le plan osculateur et l'ordre de la courbe excluent pour cette courbe elle-même la présence de pointes, de points anguleux, de points doubles, de sécantes triples, de tangentes doubles et de plans tangents doubles.

3. — Cherchons les singularités que peut présenter une cubique plane C perspective de la courbe gauche Γ (2). Le point de vue O est extérieur à la courbe et tout plan osculateur qui passe par O a pour trace sur le plan de projection π une droite qui rencontre la courbe C en trois points confondus. Une telle droite pourrait être une tangente en un point double, une tangente en un rebroussement de première espèce ou une tangente d'inflexion. Faisons tourner dans un sens convenable le plan osculateur d'un petit angle autour

(1) C. JUEL, Om Ikke-Analytiske Kurver. *Id.*, 7^e série, Sect. des Sc., t. I, n° 6, 1906, p. 316.

(2) Nous aurons l'occasion de voir qu'une cubique plane quelconque ne saurait être la perspective d'une cubique gauche (cf. chap. III, théorème III).

de la droite OM qui joint le point de vue au point d'osculation ; il coupera la courbe Γ au point M et en deux points aussi voisins de M qu'on le voudra. Sa trace sur le plan π coupera la cubique C en m , projection de M et en deux points aussi voisins de m qu'on le voudra. Dans le cas d'un point double ou d'un rebroussement en m , l'un de ces deux points devrait rester confondu avec m , ce qui n'a pas lieu si OM n'est pas confondue avec la tangente en M à la courbe Γ . Le point M se projette donc en un point d'inflexion de la cubique C .

Réciproquement, une tangente d'inflexion de cette courbe est la trace d'un plan osculateur à Γ qui passe par le point de vue.

La cubique C aura un point double en n si le rayon On rencontre la courbe gauche en deux points. Supposons les distincts : N et N' . Le point de vue est alors situé sur une bisécante à la courbe Γ et les tangentes à Γ aux points N et N' se projettent suivant les tangentes au point double n qui sont par suite distinctes. Si N et N' sont confondus, le point de vue est sur une tangente ON à la courbe gauche. Tout plan mené par cette droite coupe encore la courbe Γ en un point qui peut être aussi voisin qu'on le veut de N sur la courbe et se confond avec N quand le plan est osculateur. Sa trace est tangente à la cubique C au point n qui est un rebroussement de première espèce.

Aucun point de la courbe Γ ne peut se projeter suivant un rebroussement de deuxième espèce puisque la courbe C ne peut admettre une telle singularité. La cubique plane ne peut avoir non plus un point double isolé puisque la courbe gauche d'après sa définition même n'a aucun point isolé.

En résumé, quand le point de vue O est extérieur à Γ , la perspective de cette cubique peut présenter les singularités suivantes :

- le point d'inflexion, si un plan osculateur passe par O ;
- le point double à tangentes distinctes, si une bisécante passe par O ;
- le rebroussement de première espèce si une tangente à Γ passe par O .

Dans ce dernier cas, la cubique plane perspective de Γ a un rebroussement et un point d'inflexion. Par le point O passe un plan osculateur et un seul distinct de celui qui contient la tangente sur laquelle est situé ce point. Le point O appartient alors à la sur-

face lieu des tangentes ou développable circonscrite à la courbe gauche.

4. — Quand O n'est pas situé sur cette surface, la cubique plane C possède trois inflexions si elle n'a pas de point double et une inflexion dans le cas contraire. Par le point O passent trois plans osculateurs et alors il ne peut y avoir de bisécante, ou bien il passe par O avec une bisécante un seul plan osculateur. La courbe Γ est donc de *troisième classe*. Le nombre des bisécantes et des plans osculateurs qu'on lui mène par un point de l'espace ne varie que quand ce point traverse la surface développable : quand apparaît une bisécante, deux plans osculateurs s'éliminent et inversement.

JUEL a énoncé ce dernier résultat et a également montré que la développable est du quatrième ordre : on le voit en faisant la perspective de Γ à partir d'un point O de la développable non situé sur Γ . On obtient une cubique plane à rebroussement dont la classe est 3 (1). Une droite quelconque menée par le point de vue rencontre au plus trois tangentes à Γ en dehors de celle qui passe par O . Cette droite rencontre donc en quatre points au plus la développable.

5. — Il est utile d'examiner pour la suite le cas où la droite rencontre la courbe Γ en un point M : Supposons-la d'abord extérieure au plan osculateur en M . On peut alors trouver une droite voisine passant par O qui rencontre deux tangentes à Γ dont les points de contact sont voisins de M . La droite OM rencontre donc la développable en deux points confondus en M .

Si le point O appartient au plan osculateur à Γ au point M , une droite voisine convenablement choisie rencontre 3 tangentes à Γ dont les points de contact voisins de M viennent se confondre en ce point lorsque la droite tourne autour de O pour venir coïncider avec OM . La droite OM rencontre dans ce cas la développable en 3 points confondus avec le point M .

La réciproque se démontre aisément puisque toute perspective de Γ est formée par la réunion de trois arcs convexes au plus.

(1) C. JUEL, Mém. cité (p. 7, note 1), p. 303.

CHAPITRE II.

Les Sections planes de la Développable.

6. — JUEL a indiqué la propriété essentielle des sections planes de la développable (1) : Elles présentent un rebroussement en chaque point de rencontre avec la courbe gauche à condition toutefois que le plan sécant ne contienne aucune tangente à cette courbe. Il a montré aussi que tout plan osculateur à la courbe gauche est tangent à la développable et la coupe suivant une courbe du deuxième ordre.

Il a admis pour sa démonstration que la développable est une surface élémentaire, c'est-à-dire dont toute section plane est une courbe élémentaire et il a utilisé la classification et les propriétés des quartiques planes qu'il avait données dans un autre mémoire (2). Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier directement les sections planes de la développable et de préciser leur forme.

Coupons cette surface par un plan sécant π (donc non osculateur) et cherchons les singularités de la courbe intersection qui est du quatrième ordre.

Peut-elle avoir un point triple P ? Le plan π coupe la cubique gauche en au moins un point M et la droite PM rencontrerait la développable en $3 + 2 = 5$ points (d'après le précédent chapitre, n° 5). Si le point P était sur la cubique, toute droite du plan π menée par P appartiendrait au plan osculateur en P qui se confondrait avec π . La courbe n'a aucun point triple.

Si elle présentait un point double Q , toute droite de π passant par ce point serait tangente en Q à la surface, à moins que Q ne soit sur la cubique. Dans le premier cas, le plan π serait osculateur, ce qui est contraire à l'hypothèse. Dans le second cas, une tangente à la quartique au point double Q rencontre la développable en trois points confondus en Q sur la cubique gauche. La tangente appartient au plan osculateur en Q . Elle est donc unique et le point

(1) C. JUEL, *Idem.*, p. 318.

(2) C. JUEL, *Mém. cité* (p. 6, note 2), p. 140-161.

double est un rebroussement. La tangente de rebroussement, trace du plan osculateur en Q sur le plan π est la limite de droites du plan π qui rencontrent la développable en 3 points voisins de Q . Le point Q est donc un rebroussement de première espèce.

Si la quartique a un point d'inflexion M , la tangente d'inflexion a trois points communs en M avec la développable ; elle est dans un plan osculateur et le point M est sur la cubique gauche. Pour toute droite du plan π menée par M , autre que la tangente d'inflexion, le point M serait un point simple de rencontre avec la développable. Or ce doit être un point double d'intersection. Il faut donc que la quartique se décompose. L'existence du point d'inflexion exclut la décomposition en deux courbes du deuxième ordre. Elle se décompose en une droite et une cubique qui toutes deux passent par M . Le plan est donc tangent en M à la cubique gauche. La tangente d'inflexion, trace sur le plan π du plan osculateur en M , est la tangente à la cubique gauche qui fait elle-même partie de la quartique décomposée.

Montrons enfin que la quartique (décomposée ou non) ne peut présenter un point anguleux R . Les tangentes au point anguleux détermineraient dans le plan π deux couples d'angles opposés par le sommet. Les droites menées par le point anguleux et situées dans l'un de ces couples sont des tangentes impropres qui rencontrent la quartique en deux points confondus avec R . Le plan π doit être osculateur ou bien le point P est sur la cubique gauche. Dans ces deux cas, les droites situées dans l'autre couple ne peuvent exister car ces droites rencontrent la quartique au point anguleux en un point simple. Il n'y a pas de point anguleux.

En résumé, les seules singularités que peut présenter une section plane de la développable sont le rebroussement de première espèce et le point d'inflexion. Elles ne peuvent apparaître qu'aux points où le plan π rencontre la cubique gauche.

Réciproquement, un tel point d'intersection M ne peut être un point ordinaire de la quartique, sinon on trouverait des droites pour lesquelles le point M serait un point simple d'intersection avec la développable. C'est impossible puisque M appartient à la cubique gauche. On a ainsi démontré la proposition suivante :

Une section de la développable par un plan non osculateur à la cubique admet un rebroussement de première espèce en tout point

commun avec la cubique, sauf si le plan est tangent à cette courbe auquel cas il y a inflexion au point de contact. La courbe d'intersection n'admet pas d'autre point singulier.

Il résulte de là que la courbe gauche est arête de rebroussement de sa développable et qu'elle est la seule courbe tracée sur la développable qui jouisse de cette propriété.

7. — La forme des sections planes est maintenant immédiate :

Soit π un plan tangent en M à la cubique gauche. Il rencontre encore cette courbe au point N. Son intersection avec la développable se compose de la tangente μ à la courbe gauche en M et d'une cubique qui admet la droite μ pour tangente d'inflexion au point M et qui présente en N un rebroussement dont la tangente est la trace du plan osculateur en ce point à la courbe gauche.

Soit π un plan sécant qui rencontre la cubique gauche en 3 points P, Q, R. La trace de la développable sur ce plan est une quartique qui admet pour toutes singularités trois rebroussements de première espèce aux points P, Q, R. Les droites joignant ces points deux à deux ne rencontrent pas la courbe en dehors d'eux. Si la courbe est tout entière à distance finie, elle est intérieure au triangle P, Q, R. Elle ne peut se composer de 3 boucles fermées chacune sur un point de rebroussement puisqu'elle n'a pas de point d'inflexion. Elle se compose donc de trois arcs intérieurs au triangle P, Q, R, qui joignent les sommets de ce triangle deux à deux. Une tangente à l'arc $\widehat{PQ}$ en un point voisin de P coupe l'arc $\widehat{PR}$ puisqu'il se raccorde au premier suivant un rebroussement en P. Une tangente voisine de Q coupe l'arc $\widehat{QR}$. Quand le point de contact décrit l'arc $\widehat{PQ}$, cette tangente rencontre la quartique en deux autres points qui se déplacent respectivement sur l'arc $\widehat{PR}$ et sur l'arc $\widehat{RQ}$. Ces deux points ne peuvent coïncider. La courbe n'admet donc aucune tangente double. De plus les trois tangentes de rebroussement se coupent deux à deux à l'intérieur du triangle $\widehat{PQR}$.

Si la courbe a des branches infinies on peut toujours la projeter à distance finie par une perspective. Elle affecte alors la forme que nous venons de décrire. Donc, dans tous les cas :

L'intersection de la développable par un plan qui rencontre en trois points la cubique gauche est une quartique à trois rebroussements sans tangente double. Le triangle fini formé par les tangentes de

rebroussement est intérieur au triangle qui a pour sommets les trois rebroussements.

Soit un plan π qui rencontre la cubique gauche en un seul point P. La trace de la développable sur ce plan est une quartique qui admet pour tout point singulier un rebroussement de première espèce en P. Elle ne peut se décomposer en plusieurs branches du deuxième ordre car l'une d'elles aurait un rebroussement, ni contenir une branche du troisième ordre puisqu'il n'y a pas de point d'inflexion. Elle est donc formée d'une branche unique. Raccordons par un petit arc les deux arcs de la courbe au voisinage du rebroussement. Ce raccordement n'augmente pas l'ordre de la courbe et introduit deux inflexions. Nous obtenons une courbe du même ordre, sans point double ni pointe et pourvue de 2 inflexions. Une telle courbe admet une tangente double et une seule. Supprimons le raccordement : la quartique primitive a une tangente double et une seule.

La section de la développable par un plan qui rencontre la courbe gauche en un seul point est une quartique à un rebroussement qui admet une tangente double et une seule.

CHAPITRE III.

La famille des droites communes à deux plans osculateurs.

8. — JOACHIMSTHAL (1) et CRÉMONA (2) ont étudié la famille des droites qui s'obtiennent comme intersection de deux plans osculateurs d'une courbe algébrique et du troisième degré. Ils ont montré qu'un plan contient une telle droite ou aucune suivant qu'il rencontre la cubique en un ou trois points.

Ce résultat reste valable pour notre courbe du troisième ordre. Pour le prouver, nous établirons d'abord quelques propriétés de la droite commune à deux plans osculateurs.

(1) JOACHIMSTHAL, *Note à la suite du mém. de Schröter*. J. DE CRELLE, vol. 56, 1859, p. 45.

(2) CREMONA, *Sur quelques propriétés des lignes gauches de 3^e ordre et classe*, J. DE CRELLE, vol. 58, 1861, p. 146.

THÉORÈME I : *Les plans menés par une droite commune à deux plans osculateurs rencontrent la cubique en un seul point.*

Sinon un tel plan contiendrait trois bisécantes et chacune d'elles aurait un point commun à trois plans osculateurs, ce qui contredit les résultats du n° 4.

THÉORÈME II : *Une droite ne peut appartenir à plus de deux plans osculateurs.*

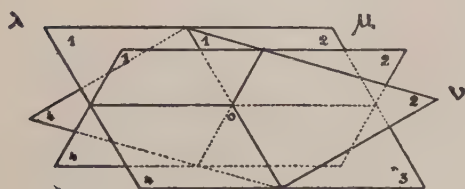
En un point situé sur la développable passent en effet deux plans osculateurs (voir n° 4). Or la droite commune à deux plans osculateurs rencontre la développable en au moins deux points.

THÉORÈME III : *La droite commune à deux plans osculateurs est bitangente à la développable.*

Pour démontrer cette proposition, projetons la cubique gauche Γ à partir d'un point O commun à trois plans osculateurs et montrons qu'on peut choisir le plan de projection de manière que la cubique perspective C ne pénètre pas à l'intérieur du triangle fini formé par ses tangentes d'inflexion. La courbe C est pourvue de trois inflexions. Une telle cubique appartient à l'un des deux types suivants : C'est une courbe complète, de classe 6, telle qu'on ne peut lui adjoindre aucune branche nouvelle sans augmenter son ordre, ou bien c'est une courbe incomplète de classe 4. Comme la cubique C est une perspective de Γ (dont le rang est 4) elle est au plus de classe 4. Cela prouve en passant qu'une cubique plane quelconque ne peut pas être considérée comme la perspective d'une cubique gauche.

Soient λ, μ, ν les trois plans osculateurs qui passent par le point de vue O et L, M, N leurs points de contact avec la courbe gauche. Ces trois plans déterminent autour du point O huit trièdres et chacun contient quatre faces. Les points L, M, N qui sont chacun dans une des faces appartenant à l'un des plans peuvent être répartis de 64 manières différentes autour du point O . On peut choisir l'un des points, N par exemple, dans une face déterminée du plan ν sans restreindre le problème, puisque les quatre faces de ce plan jouent le même rôle. Le nombre des positions possibles des points L, M, N est ainsi réduit à 16. Les points d'inflexion de la cubique projection ne changent pas si L et M sont remplacés par leurs symétriques par rapport à O , ce qui réduit à 8 les cas à examiner. Il est impossible que les trois points soient sur les faces d'un même trièdre car on pourrait alors obtenir une cubique plane traversant

les trois côtés du triangle fini formé par les tangentes d'inflexion. Il existe deux tels trièdres, ce qui supprime deux cas. Enfin, si L et M sont sur deux faces d'un même trièdre, on ne peut, sans aboutir à la même impossibilité, placer le point M dans la face opposée par le sommet à la troisième face de ce trièdre, ce qui supprime 4 cas puisque L et M jouent le même rôle. Il reste finalement 2 cas possibles. Numérotons de 1 à 4 les faces dans chaque plan ; ces deux cas sont les suivants, en supposant N dans la face 2 du plan ν :



	L	M	N
	1	1	2
	2	2	2

FIG. 1.

Les points L, M, N sont sur deux trièdres ayant une face commune. Il existe quatre trièdres dont les faces ne passent par aucun de ces points et deux d'entre eux (et deux seulement) sont opposés par le sommet. Si on choisit pour plan de projection un plan qui coupe les arêtes de l'un de ces trièdres, la perspective de la courbe gauche est une cubique qui ne pénètre pas dans le triangle fini de ses tangentes d'inflexion.

Le point O appartient à trois plans osculateurs et la droite commune à deux de ces plans se projette en un des sommets du triangle fini des tangentes d'inflexion. Par ce point on ne mène à la cubique C aucune tangente en dehors des deux tangentes d'inflexion qui sont chacune double. Ainsi la droite commune à deux plans osculateurs est bitangente à la développable, ce qu'il fallait démontrer.

La cubique plane C est une courbe incomplète de classe 4 et par un point situé à l'intérieur du triangle formé par les tangentes d'inflexion, on ne peut lui mener aucune tangente. Donc :

THÉORÈME IV : *Par tout point commun à trois plans osculateurs il passe une infinité de droites qui ne rencontrent pas la développable. Ces droites sont situées à l'intérieur de deux trièdres opposés par le sommet dont les faces sont dans les plans osculateurs.*

Si nous prenons maintenant le point de vue O sur une bisécante, la cubique plane C a un point double d'où part une pseudo-branche de deuxième ordre. Toute droite menée par O et qui ne rencontre pas la développable a sa trace à l'intérieur de cette pseudo-branche. *Ces droites sont contenues dans un cône du second ordre qui n'a aucune génératrice dans le plan osculateur unique qui passe par O .*

9. — L'étude faite au précédent chapitre montre qu'une section plane de la développable ne présente pas de point double extérieur à la cubique gauche. Une tangente à la développable est donc tangente à la trace de cette surface sur un plan non osculateur mené par elle. Une bitangente à la développable est tangente double aux sections planes menées par elle et réciproquement. En rapprochant ce résultat de celui du n° 7 nous obtenons la proposition cherchée :

THÉORÈME V : *Les plans qui rencontrent la cubique en trois points ne contiennent pas de droite commune à deux plans osculateurs. Ceux qui la rencontrent seulement en un point contiennent une telle droite et une seule.*

CHAPITRE IV.

Courbes gauches du Troisième ordre tracées sur un hyperboloïde ou un cône convexe.

10. — Par analogie avec les courbes algébriques, on pourrait songer à construire une courbe du troisième ordre comme intersection de surfaces réglées du second ordre qui ont une génératrice commune. Mais, comme l'a montré JUEL (1), il n'existe pas de surface réglée du deuxième ordre, le cône excepté, qui ne soit algébrique : car tout plan qui contient une génératrice de la surface en contient nécessairement une seconde et les génératrices se classent en deux systèmes tels que chaque génératrice de l'un rencontre chaque génératrice de l'autre. La surface est une quadrique réglée.

(1) C. JUEL, Mémoire cité (p. 7, note 1), p. 352.

Il paraîtrait alors naturel d'étudier l'intersection d'un cône convexe (1) avec une quadrique réglée lorsque ces surfaces admettent une génératrice commune. Mais un ovale et une conique peuvent se couper en un nombre pair quelconque de points ; l'intersection des deux surfaces appartient donc à une catégorie plus large que celle des courbes d'ordre trois et il est nécessaire d'étudier à quelles conditions une courbe tracée sur une surface réglée du second ordre est d'ordre trois. Ce sera l'objet du présent chapitre. Nous examinerons successivement une courbe tracée sur un hyperboloïde à une nappe et sur un cône du second ordre.

I. — *Courbe sur un hyperboloïde à une nappe.*

11. — Soit un hyperboloïde à une nappe H_1 et sur cette surface une courbe d'ordre borné à tangente et plan osculateur uniques en chaque point et qui varient continuellement. Nous allons chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une telle courbe soit du troisième ordre. Nous reviendrons au chapitre suivant sur l'existence de la courbe.

Pour que la courbe soit du troisième ordre, il faut et il suffit qu'elle vérifie les trois conditions suivantes :

- 1° *Rencontrer chaque génératrice de l'un des systèmes en un point.*
- 2° *Rencontrer chaque génératrice de l'autre système en O ou 2 points.*
- 3° *N'admettre aucun plan doublement tangent.*

a) Les conditions sont nécessaires. La dernière l'est évidemment. Pour examiner les deux premières, prenons un point quelconque O de la courbe, supposée du troisième ordre, comme point de vue et soient G_1 et G_2 les deux génératrices de H_1 qui concourent en ce point. Sur un plan quelconque π qui ne passe pas par le point de vue, la perspective de la cubique est un ovale dont la tangente en « perspective de O » est la trace du plan osculateur en O à la courbe gauche. On peut d'ailleurs supposer cet ovale tout entier à distance finie

(1) Nous désignerons aussi une telle surface d'ordre réel deux par l'expression « cône du second ordre » réservant pour le cône algébrique les termes « cône du second degré ».

Le plan tangent G_1OG_2 à l'hyperboloïde a pour trace sur le plan π une droite qui rencontre l'ovale au point ω et en un second point situé sur l'une des deux génératrices issues de O , soit G_1 . Ce point g_1 est distinct de ω si la courbe gauche n'est pas tangente en O à la génératrice G_1 , ce que nous supposons. Toute génératrice du même système que G_2 se projette sur le plan π suivant un rayon issu de g_1 qui rencontre l'ovale en un second point variable. Les génératrices de ce système rencontrent donc la cubique en un point et un seul.

Celles de l'autre système ont pour perspective un rayon issu de la trace g_2 de G_2 . Ce point est situé sur la sécante ωg_1 à l'ovale. S'il est dans la région intérieure à l'ovale, toute génératrice de ce système rencontre la cubique en deux points distincts. Si g_2 est extérieur à l'ovale, on mène à cette courbe deux tangentes g_2t et g_2t' . Le point t par exemple est la perspective de deux points de la cubique alignés sur le point de vue, ce qui n'est possible que si ces deux points sont confondus. Ainsi g_2t et g_2t' sont les images de deux génératrices tangentes à la courbe gauche.

En résumé, si la cubique gauche n'est tangente à aucune génératrice de H_1 , les génératrices d'un système la rencontrent en un point, celles de l'autre système en deux points distincts.

Si la cubique est tangente à une génératrice, il existe une deuxième génératrice du même système qui lui est aussi tangente. Les autres génératrices de ce système rencontrent la courbe en deux points ou ne la rencontrent pas. Celles de l'autre système la rencontrent en un point.

Nous avons ainsi établi que les conditions sont nécessaires. Au point où la cubique touche une génératrice de l'hyperboloïde, le plan tangent à cette surface est osculateur à la courbe.

Réciproquement, un plan osculateur à la courbe qui contient une génératrice passant par le point d'osculatation coïncide avec le plan tangent à l'hyperboloïde en ce point. Il contient donc la génératrice du deuxième système issue de ce point qui est nécessairement confondue avec la tangente à la cubique.

b) Montrons que les conditions sont suffisantes. Supposons donc une courbe d'ordre borné, à tangente et plan osculateur uniques et continus en chaque point, tracée sur un H_1 dont elle rencontre les génératrices G_1 en un point et les génératrices G_2 en 0 ou 2 points.

Faisons une perspective de la courbe sur un plan quelconque π à partir d'un point O choisi hors de la courbe sur une G_2 qui la rencontre en deux points distincts. La courbe plane obtenue est d'ordre borné, complètement continue et possède un point double. Toute sécante issue de ce point la rencontre en un seul point variable. Je dis que *si cette courbe plane n'admet aucune tangente double elle est du troisième ordre*.

Une telle courbe ne peut avoir de pointe et elle est d'ordre impair. Il suffit de montrer que si elle est d'ordre supérieur à 3, par exemple d'ordre 5, elle admet au moins une tangente double. Supposons donc une droite qui coupe la courbe en 5 points. Déplaçons cette droite dans le plan π d'une manière arbitraire, de façon à l'amener à passer par le point double. Dans ce mouvement, elle traverse une position où deux points s'évanouissent et elle est tangente. Amenons le point de contact de cette tangente jusqu'au point double le long de la courbe. La tangente enveloppe la courbe dans ce déplacement et passe par une position où deux points d'intersection s'évanouissent. Elle est alors bitangente.

Ainsi la courbe plane est du troisième ordre si elle n'admet aucune tangente double. Comme le point de vue O est arbitraire sur la génératrice G_2 choisie, il s'ensuit que la courbe gauche tracée sur H_1 est du troisième ordre si elle n'admet aucun plan doublement tangent. Le théorème énoncé au début du chapitre est donc démontré.

12. — Nous compléterons cette étude de courbes tracées sur un H_1 en donnant un exemple de courbe du cinquième ordre au moins qui rencontre en un point les génératrices d'un système, en 0 ou 2 points celles de l'autre système et nous montrerons qu'une telle courbe admet au moins un plan tangent double.

Prenons une cubique tracée sur l'hyperboloïde (ce pourra être par exemple la cubique de CHASLES). Soit un point de vue extérieur à la courbe et situé sur une génératrice G_2 qui est une bisécante de la courbe. La perspective de cette courbe sur un plan quelconque π est une cubique plane C pourvue d'un point double et d'une inflexion. Puisque toute génératrice du premier système rencontre la courbe gauche en un seul point, toute sécante menée dans le plan π par le point double rencontre la cubique C en un seul point distinct du point double. De même, toute sécante menée dans le plan π

par la trace g_1 de la génératrice du premier système qui passe au point de vue rencontre encore la courbe C en deux points ou aucun, soit au plus en 3 points. Il est possible d'introduire sur la cubique plane deux petites ondulations au voisinage du point d'inflexion, l'une avant, l'autre après ce point de manière que la courbe devienne du cinquième ordre tout en ne rencontrant qu'en trois points une droite menée par le point double.



FIG. 2.

Si le plan π a été choisi assez voisin du point de vue, la trace g_1 de la génératrice G_1 qui passe par le point de vue est voisine du point double et toute sécante issue de g_1 rencontre aussi la courbe C en trois points au plus. La quintique plane obtenue est la perspective d'une courbe gauche dont l'ordre est au moins égal à cinq, tracée sur H_1 qui rencontre les génératrices de chaque système respectivement en 1 et 0 ou 2 points. Elle possède au moins un plan tangent double.

II. — *Courbe sur un cône du second ordre.*

13. — Considérons maintenant une cubique gauche tracée sur un cône du second ordre. Deux génératrices du cône ne peuvent la couper chacune en deux points distincts du sommet, ni chacune en un seul point. Il s'ensuit que le sommet est un point de la courbe et que toute génératrice la rencontre encore en un point et un seul. Au sommet, la courbe est tangente à une génératrice. Ainsi chaque génératrice rencontre la courbe en deux points dont un confondu avec le sommet du cône.

Cette propriété ne suffit pas à caractériser une cubique gauche tracée sur un cône. On démontrerait comme dans le cas de l'hyperboloïde qu'une courbe d'ordre borné à tangente et plan osculateur

uniques en chaque point et continus, tracée sur un cône du second ordre et qui rencontre chaque génératrice en deux points dont un confondu avec le sommet du cône peut être d'ordre impair supérieur à 3. Mais elle admet alors au moins un plan doublement tangent. Ainsi :

THÉORÈME : *Pour qu'une courbe gauche tracée sur un cône du second ordre soit du troisième ordre, il faut et il suffit qu'elle passe par le sommet du cône, qu'elle rencontre en outre chaque génératrice en un point et qu'elle n'admette aucun plan bitangent.*

COROLLAIRE I. — Pour que la courbe commune à deux cônes du second ordre qui ont en commun une génératrice soit du troisième ordre, il faut et il suffit qu'elle n'admette aucun plan doublement tangent.

Ou encore :

COROLLAIRE II. — Pour que l'intersection de deux cônes du second ordre qui ont une génératrice commune soit une cubique gauche, il faut et il suffit qu'aucune section plane des deux cônes ne soit constituée par un couple d'ovales bitangents.

14. — Nous terminerons ce chapitre en donnant un exemple de courbe d'ordre supérieur au troisième, tracée sur deux cônes du deuxième ordre à génératrice commune et qui admet un plan doublement tangent.

Un cylindre perpendiculaire au plan du tableau a pour trace sur ce plan une ellipse E . La génératrice passant au point O est commune à ce cylindre et à un cône dont la directrice est un ovale Ω que nous allons construire. Soient MT et NR deux tangentes arbitraires à l'ellipse E ; $M'T'$ et $N'R'$ leurs homothétiques par rapport au point O dans un rapport K ($0 < K < 1$). Pour une valeur convenable de K , le point A' où se rencontrent ces dernières droites est extérieur à l'ellipse et chacune des demi-droites $A'T'$ et $A'R'$ rencontre l'ellipse en deux points. Une sécante $B'OC'$ menée par O achève le triangle $A'B'C'$ dont chaque côté rencontre l'ellipse E en deux points. Je constitue l'ovale Ω par trois arcs convexes raccordés aux points M' , N' et O : ce sont les arcs $\widehat{OM'}$, $\widehat{M'N'}$ et $\widehat{N'O}$ qui traversent chacun l'ellipse en deux points. Il est toujours possible de tracer ces arcs qu'on peut choisir aussi voisins qu'on le veut des

côtés du triangle. L'ovale Ω rencontre ainsi l'ellipse en 6 points et la courbe commune au cône et au cylindre est au moins du cinquième ordre.

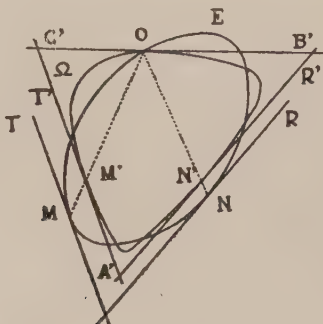


FIG. 3.

Cela posé, un plan parallèle au plan du tableau rencontre le cylindre suivant une ellipse qui se projette orthogonalement suivant l'ellipse E ; il coupe le cône suivant un ovale dont la projection est homothétique de l'ovale Ω par rapport à O . Il existe en particulier un plan (homothétique du plan du tableau par rapport au sommet du cône dans le rapport $\frac{1}{K}$) qui coupe le cône suivant un ovale dont

la projection est un ovale bitangent en M et N à l'ellipse. Ce plan est doublement tangent à la courbe commune au cône et au cylindre.

Cet exemple serait en défaut si la courbe se décomposait et si, étant en particulier du neuvième ordre, elle pouvait être constituée par 3 courbes du troisième ordre. Mais il est évident que si une cubique fait partie de l'intersection de deux cônes du second ordre qui ont une génératrice commune elle constitue avec cette génératrice l'intersection tout entière : sinon soit P un point quelconque d'une autre courbe appartenant à l'intersection ; les génératrices SP et $S'P$ des cônes seraient deux bisécantes coplanaires pour la cubique ; le point P ne peut donc exister. L'intersection des deux cônes ne peut d'ailleurs pas davantage comprendre un ovale car les deux cônes seraient tangents le long de leur génératrice commune.

Ainsi le cône et le cylindre ayant pour directrices Ω et E ont en commun une courbe du cinquième ordre au moins qui admet un

plan bitangent. Une transformation homographique mue les deux surfaces en deux cônes du second ordre dont la courbe possède la même propriété.

CHAPITRE V.

Exemples de cubiques gauches tracées sur des surfaces algébriques.

15. — Les résultats du précédent chapitre vont nous permettre d'établir la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ovale et une conique soient les directrices de deux cônes ou d'un cône et d'un H_1 qui aient en commun une cubique gauche. Nous donnerons un exemple d'une telle courbe (1) ; auparavant nous montrerons qu'une cubique gauche, algébrique et de degré supérieur à trois, peut être obtenue par un raisonnement analogue à celui qui a permis à MM. A. BLOCH (2) et R. MEYNIEUX de prouver l'existence d'une surface du troisième ordre et du 27^e degré contenant 27 droites.

I. — *Courbe du Troisième ordre, algébrique et du septième degré.*

16. — Soient H_1, H_2, H_3 trois hyperboloïdes à une nappe qui ont en commun une génératrice Δ ; soient E_1 et E_2 deux ellipsoïdes imaginaires. La surface d'équation :

$$H_1 E_1 + \lambda H_2 E_2 = 0$$

(1) Les théorèmes du chapitre IV permettent également de construire deux cônes convexes qui aient une génératrice commune et se coupent suivant une courbe gauche du troisième ordre. La méthode qui nous a permis d'obtenir de tels cônes fait intervenir des propriétés métriques. Il nous a paru préférable d'en faire une note placée à la fin du présent mémoire en nous bornant à exposer dans ce chapitre les exemples de cubiques gauches où interviennent seulement des résultats projectifs.

(2) A. BLOCH, Sur les surfaces élémentaires du troisième ordre de la Géométrie finie, *Bol. Math. de Buenos Aires*, 1931, n° 6, p. 73 et 1933, n° 5, p. 67.

où λ représente un paramètre arbitraire, est du quatrième degré. Elle rencontre l'hyperboloïde

$$H_3 = 0$$

suivant la génératrice Δ et une courbe Γ du septième degré. Quand λ tend vers zéro, cette courbe Γ tend au point de vue réel vers la cubique commune à H_1 et H_3 . Un plan qui rencontre cette cubique en trois points réels coupe la courbe Γ en 7 points qui lorsque λ tend vers zéro donnent à la limite 3 points réels et 4 points imaginaires. Par une démonstration analogue à celle donnée par M. MEYNIÉUX dans le cas de la surface, on verrait que pour une valeur de λ suffisamment petite le plan coupe la courbe Γ en 3 points réels et 4 points imaginaires. Il s'ensuit que la courbe Γ est du troisième ordre et du septième degré.

II. — *Courbe du Troisième ordre tracée sur une surface du second degré.*

17. — JUEL (1) a donné des exemples de cubiques gauches obtenues par intersection d'un cône du deuxième ordre avec un cône du second degré ou avec un hyperboloïde à une nappe. Il utilise un théorème dont il ne rappelle pas la démonstration et qu'il emprunte au Dr BOHMES de Göttingue : Il existe des ovales qui rencontrent en quatre points au plus toute hyperbole de leur plan.

Il déduit facilement de ce théorème par une perspective qu'il existe des ovales rencontrant au plus en 4 points toute conique qui passe par un point fixe P ; ce qui permet de construire un hyperboloïde qui a en commun avec un cône projetant l'un des ovales en question une courbe du troisième ordre.

Une transformation dualistique montre qu'il existe des ovales coupés au plus en 4 points par toute conique tangente à une droite donnée. On déduit de là la courbe du quatrième ordre comme intersection de deux cônes, l'un du second ordre, l'autre du second degré. Dans un cas particulier, cette courbe se décompose en une droite et une cubique gauche.

(1) C. JUEL, Mém. cité (p. 7, note 1), p. 348-349.

18. — Occupons-nous d'abord de construire une cubique sur un cône du second degré. Nous démontrerons deux propositions préliminaires :

Lemme I. — Soient deux cônes du second ordre qui ont en commun une génératrice G et une courbe qui admet un plan doublement tangent. Soit une section plane quelconque π qui détermine sur ces cônes deux ovales C et C' passant par le point O situé sur G . Il existe deux couples de tangentes à ces ovales dont les points de contact sont alignés deux à deux sur le point O et dont les points d'intersection T et T' sont également alignés sur le point O .

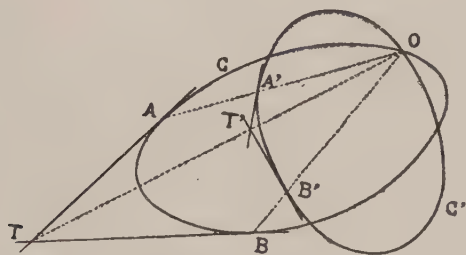


FIG. 4.

Il existe en effet deux tangentes à la courbe gauche commune aux deux cônes qui se rencontrent en un point τ . Leurs points de contact et la droite G déterminent deux plans dont les traces sur le plan π sont les droites $OA A'$, $OB B'$. Le plan $G\tau$ a pour trace la droite $OT T'$.

Réciproquement, l'existence des points T , T' alignés sur le point O entraîne l'existence d'un plan bitangent à la courbe gauche.

Nous dirons que le couple de sécantes AA' , BB' menées par le point O vérifie la *condition d'alignement*.

Lemme II. — Dans le cas où deux coniques admettent un couple de sécantes issues d'un de leurs points communs O qui vérifient la condition d'alignement, ces courbes sont tangentes au point O .

En effet, la courbe du troisième degré commune aux deux cônes qui ont pour bases les deux coniques et pour sommets deux points de l'espace alignés sur le point O se décompose en une conique et une

droite puisqu'elle admet un plan doublement tangent. Les deux cônes sont donc tangents le long de leur génératrice commune.

19. — Etant donné un ovale C , cherchons maintenant à déterminer une conique C' telle que les cônes ayant pour directrices ces courbes et pour sommets deux points de l'espace alignés sur un point O commun aux deux courbes aient en commun une cubique gauche.

D'après un précédent théorème (chapitre IV, n° 13), il faut et il suffit que la courbe commune aux deux cônes n'admette aucun plan tangent double. Il en sera ainsi, d'après le Lemne I, si on ne peut trouver dans le plan des courbes C et C' deux sécantes AA' , BB' concourant en O et qui vérifient la condition d'alignement. Si de telles droites existaient, les tangentes en A et B à l'ovale définiraient avec leurs points de contact A et B et le point O une conique bitangente à l'ovale. En vertu du Lemne II, cette conique serait tangente en O à la conique C' . Ce qui établit le résultat suivant :

Pour qu'un ovale et une conique soient les directrices de deux cônes qui aient en commun une courbe du troisième ordre, il faut et il suffit que la conique ne touche en un de ses points O de rencontre avec l'ovale aucune des coniques qui passent par ce point et sont en outre bitangentes à l'ovale. Les sommets des cônes sont deux points quelconques de l'espace alignés sur le point O .

Une telle conique n'existe pas nécessairement si l'ovale C est quelconque. Donnons un exemple en prenant pour ovale une courbe algébrique :

La courbe d'équation polaire

$$\rho = \sin^3 \theta$$

est décrite entièrement quand on fait varier θ de 0 à π . L'angle V tel que

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \theta$$

croît constamment de 0 à π , ce qui suffit à prouver que la courbe est un ovale. Son équation cartésienne est

$$(x^2 + y^2)^2 - y^3 = 0.$$

Le faisceau des droites joignant l'origine des coordonnées aux points communs à cet ovale et à la conique

$$a x^2 + 2 b x y + y^2 + d x = 0$$

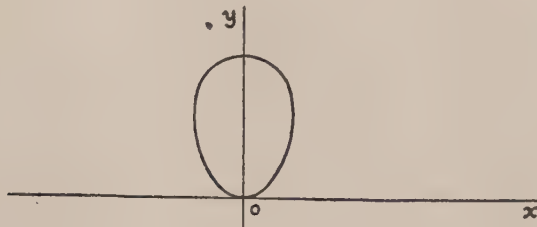


FIG. 5.

tangente en O à l'axe des y a pour équation :

$$(a x^2 + 2 b x y + y^2) y^3 + d x (x^2 + y^2)^2 = 0$$

la conique est bitangente à l'ovale si l'équation du faisceau peut s'écrire :

$$(y - t x)^2 (y - t' x)^2 (y - t'' x) = 0$$

En identifiant, on trouve la condition :

$$2 (t + t')^2 + t^2 + t'^2 + 2 t^2 t'^2 = 0$$

qui n'est vérifiée par aucune valeur réelle (non nulle) de t et t' . Il n'existe donc aucune conique bitangente à l'ovale qui passe à l'origine des coordonnées et admette en ce point pour tangente l'axe des y.

Une conique passant par O et tangente en ce point à l'axe Oy peut donc être associée à l'ovale pour constituer deux cônes de sommets arbitraires S et S' alignés sur O dont l'intersection est une courbe du troisième ordre. Cette courbe est algébrique et du cinquième degré.

20. — Cherchons maintenant un hyperboloïde qui ait en commun avec le cône S dont un ovale C est une section plane une génératrice et une courbe du troisième ordre. D'après un corollaire du précédent chapitre (n° 13), il faut et il suffit qu'aucune section plane de ces deux surfaces ne soit constituée par deux courbes bitangentes. Si

deux telles courbes existaient, on les projetterait sur le plan π à partir du point de vue S , sommet du cône, suivant l'ovale C et une conique bitangente qui passerait par le pied O de la génératrice commune. La deuxième génératrice de l'hyperboloïde qui passe au point S aurait pour trace dans le plan π un point de cette conique. Ainsi :

Etant donnés un point O sur un ovale C , un point P du plan par lequel ne passe aucune conique qui contienne le point O et soit bitangente à l'ovale, enfin un point S extérieur au plan, tout hyperboloïde qui contient les droites SO et SP coupe le cône (S, C) suivant une courbe gauche du troisième ordre.

CHAPITRE VI

Le prolongement d'un arc gauche du Troisième ordre.

21. — Etant donné un arc gauche du troisième ordre, borné, on peut se demander s'il est possible de raccorder à ses extrémités d'autres arcs du troisième ordre de manière que l'ensemble de ces arcs constitue un arc du troisième ordre ou, plus généralement, une courbe du troisième ordre projectivement fermée. JUEL a répondu à cette question (1) : Le prolongement est toujours possible si le plan osculateur à chaque extrémité de l'arc ne contient pas l'autre extrémité et si les tangentes aux deux extrémités ne se rencontrent pas.

M. HAUPT a donné de ce résultat une démonstration (2) où il réalise un prolongement par l'intermédiaire d'une transformation projective en faisant intervenir la notion de l'ordre d'un point sur l'arc. Nous nous proposons dans ce chapitre de montrer que tout

(1) C. JUEL, Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen, *Atti. Congr. internaz. Bologna*, vol. 4, 1928, p. 195-215.

(2) O. HAUPT, *Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu eine Raumkurve dritter Ordnung*, J. DE CRELLE, t. 170, 1934, p. 154-167.

arc gauche du troisième ordre vérifiant les conditions énoncées par JUEL appartient à une courbe du troisième ordre et même à une infinité de telles courbes et de donner un procédé permettant de les construire.

22. — Soit Γ un arc gauche du troisième ordre dont les plans osculateurs et les tangentes aux extrémités A et B satisfont aux conditions de JUEL. Ces conditions sont évidemment nécessaires pour que le prolongement soit possible. Montrons qu'elles sont suffisantes.

Soit π un plan quelconque qui ne contient aucun des points A et B. Projetons l'arc sur ce plan en prenant successivement comme points de vue les deux extrémités A et B. Nous obtenons deux arcs

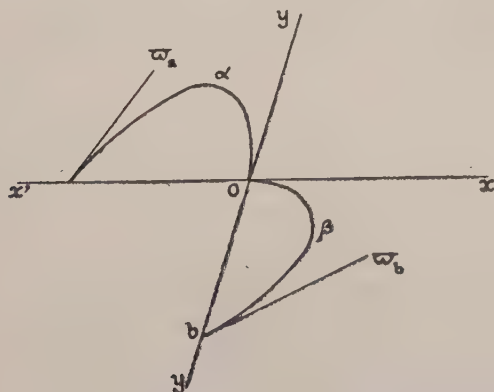


FIG. 6.

élémentaires α et β qui ont pour extrémité commune la trace O de la droite AB et pour tangentes en ce point les perspectives ox , oy des tangentes aux extrémités de l'arc Γ . Les autres extrémités a et b des arcs α et β sont sur ox et oy et les tangentes en ces points sont les traces des plans osculateurs en A et B à l'arc gauche. Les conditions de JUEL impliquent les particularités suivantes :

Les droites ox , oy sont distinctes ; les tangentes ω_a et ω_b ne sont pas confondues avec elles et ne contiennent pas les points b et a .

Tout plan mené par AB rencontre encore l'arc Γ en un point ou ne le rencontre pas. Il s'ensuit que les arcs élémentaires α et β sont

tracés dans deux angles opposés par le sommet et de côtés xx' , yy' . Nous supposons que le plan π ne rencontre pas l'arc Γ . Les arcs α et β sont alors chacun dans l'un de ces angles et n'ont aucun point commun en dehors de O. Nous pouvons en outre supposer les droites ox , oy rectangulaires. Il suffit de prendre le plan π parallèle à l'un des plans — et il en existe une infinité — qui coupent suivant un angle droit le dièdre d'arête AB dont les faces contiennent les tangentes en A et B à l'arc Γ .

Cela posé, nous avons en vue de constituer deux ovales contenant chacun l'un des arcs α et β et tels que les cônes qui ont pour directrices ces ovales et pour sommets les points A et B aient en commun une courbe du troisième ordre.

Faisons tourner l'arc β autour de O d'un angle $\frac{\pi}{2}$ dans un sens convenable de manière à le raccorder en O à l'arc α . Nous l'amenons ainsi en β_1 et les tangentes en a et b_1 aux arcs α et β_1 se coupent en un point I (fig. 7).

Considérons l'homologie de pôle O, dont l'axe est une droite quelconque passant par I et qu'achève de définir le couple (a, b_1) de points homologues. Elle fait correspondre aux arcs α et β_1 deux arcs α' et β'_1 tels que $\alpha + \beta'_1$ d'une part, $\beta_1 + \alpha'$ d'autre part constituent deux courbes projectivement fermées, complètement continues, sans pointe, inflexion ni point double. Ces courbes sont des ovales C et C'_1 . Une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$, en sens inverse de la première, amène l'arc β_1 en β et l'ovale C'_1 en C' .

Nous prendrons les ovales C et C' pour directrices de deux cônes dont les sommets sont alignés sur le point O. Pour que la courbe commune à ces cônes soit du troisième ordre, il faut et il suffit, comme nous l'avons vu au n° 18, qu'on ne puisse trouver deux sécantes Δ_1 et Δ_2 menées par le point O, telles que les couples de tangentes aux ovales dont les points de contact sont sur Δ_1 et Δ_2 aient leurs points d'intersection T et T' alignés sur le point O. Si un tel couple de sécantes existe, nous convenons de dire qu'il vérifie la condition d'alignement.

THÉORÈME I : *Un couple de sécantes qui vérifie la condition d'alignement ne peut être séparé par les droites ox , oy .*

En effet, la droite OT sépare om et on et ne peut séparer om' et

on', car si le point m' par exemple est sur la demi droite om , le point n' est nécessairement sur la demi-droite opposée à on . Dans ces conditions, si le point T' était sur OT , on pourrait de ce point mener

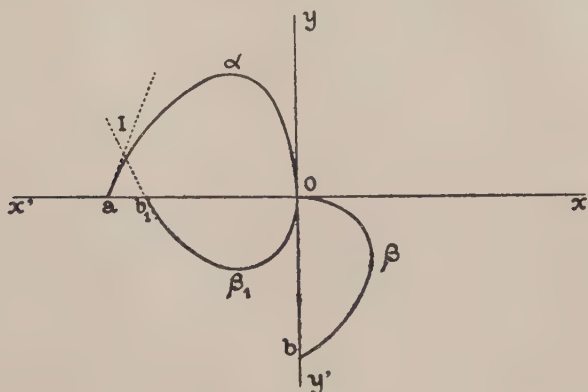


FIG. 7.

deux tangentes $T'm'$, $T'n'$ à l'arc élémentaire $om'n'$ situé d'un même côté de OTT' , ce qui est impossible.

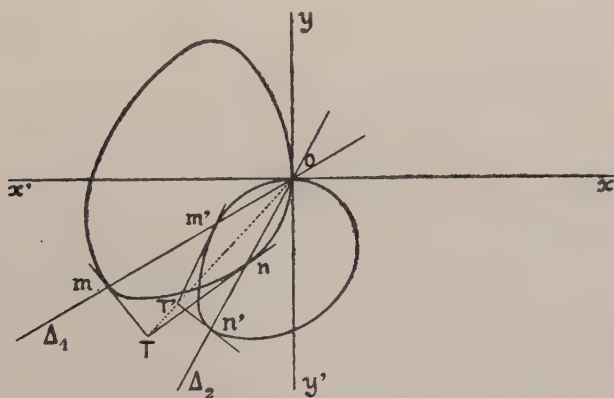


FIG. 8.

THÉORÈME II : *S'il existe un couple de sécantes vérifiant la condition d'alignement, il en existe un second qui lui est perpendiculaire.*

Soit omm' , onn' le premier couple. Les tangentes en m' et n' à l'ovale C' se rencontrent en T' aligné sur les points O et T , inter-

section des tangentes en m et n à l'ovale C . Soient opp' et oqq' les sécantes qui constituent le couple perpendiculaire au précédent. Les tangentes en p et q à l'ovale C se coupent en τ , celles en p' et q' à C' se rencontrent en τ' . Une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$ dans un sens convenable amène l'ovale C' en C'' , homologue de C . Il s'ensuit que l'angle $TO\tau'$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ ainsi que l'angle $\tau OT'$. Les points τ et τ' sont donc alignés sur le point O et les droites $T'OT$ et $\tau O\tau'$ sont rectangulaires.

23. — Il est maintenant bien facile de montrer qu'il n'existe aucun couple de sécantes vérifiant la condition d'alignement. En effet, s'il en existait un, ce couple rencontrerait, d'après le théorème I, soit les arcs α et β soit les arcs complémentaires ; et d'après le théorème II, il existerait un couple de sécantes perpendiculaires aux précédentes et qui vérifieraient la condition d'alignement. Donc il existerait un couple rencontrant les arcs α et β et vérifiant la condition d'alignement. Par suite l'arc Γ admettrait un plan doublement tangent, ce qui est impossible puisqu'il est du troisième ordre.

Ainsi les cônes qui ont pour directrices les ovales C et C' et dont les sommets sont alignés sur le point O ont en commun une cubique gauche. En particulier les cônes (A, C) et (B, C') déterminent une courbe gauche du troisième ordre qui contient l'arc Γ .

L'homologie dans le plan π que nous avons utilisée comporte un arbitraire : la direction de l'axe d'homologie. En faisant varier cette direction on obtient une infinité d'ovales C et C' qui répondent au problème. Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Les conditions de JUEL sont nécessaires et suffisantes pour qu'un arc gauche du troisième ordre soit prolongeable à ordre constant. Quand elles sont vérifiées, l'arc appartient à une infinité de cubiques gauches projectivement fermées.

En particulier, si l'arc Γ est algébrique, il appartient à une infinité de courbes du troisième ordre dont l'une est algébrique. Si l'arc Γ fait partie d'une cubique de CHASLES, l'arc complémentaire qui réalise le prolongement est du troisième degré et on obtient ainsi une courbe du troisième ordre par la réunion de deux arcs du troisième degré.

24. — Les résultats exposés dans les précédents chapitres mon-

trent que les courbes du troisième ordre tracées sur une surface du second degré ne se différencient pas de celles qu'on obtient par l'intersection de deux cônes du second ordre. On pourrait alors se demander s'il existe des cubiques qui ne soient pas tracées sur une surface du second degré. Le théorème du prolongement démontré ci-dessus permet de répondre à cette question :

Soit une courbe du troisième ordre non algébrique Γ tracée sur un cône du second degré. Elle passe par le sommet S du cône. Isolons un arc $\widehat{\alpha\beta}$ de la courbe dont le point S est un point intérieur. Cet arc est prolongeable d'une infinité de manières. Toute cubique (différente de Γ) qui le contient ne peut être tracée sur une surface algébrique car l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ serait alors algébrique. Il existe donc bien des cubiques admettant pour support soit un cône soit un hyperboloïde du deuxième degré et d'autres qui ne sont tracées sur aucune surface algébrique.



DEUXIÈME PARTIE

Les courbes gauches du Quatrième ordre.

CHAPITRE I

Définitions et hypothèses.

25. — L'étude des courbes gauches du quatrième ordre a été faite par JUEL (1) dans le cas où ces courbes sont constituées par la réunion d'un nombre fini d'arcs élémentaires, c'est-à-dire d'arcs gauches du troisième ordre complètement continus.

Après avoir examiné les cas où ces courbes se décomposent : — 4 droites ; une droite et une courbe composée du troisième ordre ; une droite et une branche du troisième ordre ; deux branches du quatrième ordre ; une branche du quatrième ordre et une du deuxième ordre ; deux branches du troisième ordre — JUEL a donné quelques théorèmes généraux sur la courbe formée d'une seule branche : la courbe a une infinité de trisécantes ou aucune ; quand elle n'a pas de trisécante, elle peut avoir un point double ou une pointe. Enfin JUEL a indiqué le nombre de plans stationnaires que peut admettre la courbe sans trisécante. Ces renseignements sont les seuls qui lui paraissent pouvoir être obtenus pour la courbe générale. Pour trouver la classe et le rang, il estime nécessaire de particulariser la courbe. C'est ainsi qu'il étudie la courbe du quatrième ordre unibranche intersection de deux cônes du second ordre et la courbe unibranche à trisécantes tracée sur un hyperboloïde.

(1) C. JUEL, *Mém. cit.* (p. 7, note 1), p. 324.

26. — Ce sont les courbes unibranches du quatrième ordre que nous allons étudier. Mais nous ne les supposons pas constituées *a priori* d'un nombre fini d'arcs élémentaires. Nous considérons une courbe de JORDAN projectivement fermée que tout plan rencontre en 4 points au plus et qu'un plan au moins rencontre exactement en 4 points. Nous supposons qu'en chaque point de la courbe la demi tangente antérieure et la demi tangente postérieure, uniques du fait de l'ordre borné, ont le même support. La continuité de la tangente est par là même assurée, d'après les travaux de M. MARCHAUD (1), et la tangente unique en chaque point M est la limite d'une sécante dont deux points d'intersection avec la courbe appartiennent à un petit arc d'extrémité M et tendent vers M le long de cet arc.

Nous supposons aussi que la courbe a en chacun de ses points un plan osculateur unique et qu'il varie continuellement. Le plan osculateur en un point M est la limite d'un plan qui a sur la courbe trois points appartenant à un petit arc d'extrémité M lorsque ces trois points tendent vers le point M. Ce plan est en particulier la limite commune du plan mené par la tangente MT et un point voisin et du plan mené par MT parallèlement à une tangente voisine. Il résulte ainsi des travaux de M. MARCHAUD (2) que tout arc borné de la courbe est rectifiable.

La perspective de la courbe Γ sur un plan quelconque est du quatrième ordre, sauf si le point de vue est pris sur la courbe elle-même. Dans ce cas la perspective est du troisième ordre au plus. L'unicité et la continuité de la tangente et du plan osculateur à la courbe gauche entraînent les propriétés suivantes : La courbe plane admet en un point quelconque m une tangente unique qui est la perspective de la tangente au point correspondant M de la courbe gauche. Dans le cas où la tangente en M passe au point de vue O, la tangente à la courbe plane en m est la trace du plan osculateur en M. Enfin le point O lui-même, quand il appartient à la courbe gauche, se projette sur la trace de la tangente en O à la courbe Γ et la tangente à la courbe plane en ce point est la trace du plan osculateur en O. La courbe plane du troisième ordre admet donc en tout

(1) A. MARCHAUD, Mém. cité (n° 1, note 2), p. 107.

(2) A. MARCHAUD, *id.*, p. 106.

point une tangente unique et continue. Elle est constituée de trois arcs convexes au plus, au sens que nous avons défini au numéro 2, et c'est une courbe élémentaire au sens de JUEL. De même, quand la perspective de Γ est une courbe du second ordre, c'est un ovale.

27. — Il est nécessaire de montrer que la parité du nombre des points de Γ situés dans un plan quelconque se conserve. Les points doivent être comptés, le cas échéant, avec un certain ordre de multiplicité et il convient de définir cet ordre. Tout plan qui rencontre la courbe en 4 points distincts la traverse en chacun d'eux et ces points sont simples. Le point de contact d'un plan tangent, limite de deux points voisins sur la courbe qui sont venus se confondre comptera pour deux ; un point d'osculation pour trois en général. Si un quatrième point vient coïncider avec le point de contact d'un plan osculateur, ce plan sera dit *stationnaire* et le point de contact nommé *point de surosculation* comptera pour quatre. Nous supposons qu'un tel plan ne touche pas la courbe en dehors du point de surosculation et nous admettrons de même qu'un plan ne peut être osculateur en deux points de la courbe. On pourrait imaginer de telles singularités sur la courbe, de même qu'on peut construire une courbe plane du troisième ordre que la tangente au point d'inflexion touche en un autre point, mais nous écarterons ces cas exceptionnels. Dans ces conditions, nous pouvons démontrer que :

Un plan quelconque rencontre Γ en 0, 2 ou 4 points.

Il existe au moins un plan qui rencontre la courbe en 4 points distincts. Soit O l'un de ces points. La perspective de Γ à partir de O sur un plan quelconque est une cubique élémentaire C . Supposons qu'il existe un plan π qui ait exactement 3 points communs avec Γ . Deux de ces points M et N et le point O définissent un plan dont la trace t sur le plan de projection rencontre la cubique C en 3 points. Supposons d'abord qu'aucun de ces points ne coïncide avec la trace ω sur le plan de projection de la tangente en O à la courbe gauche. Le plan MNO coupe alors Γ en 4 points et la perspective de cette courbe à partir de M est une cubique élémentaire ; le plan π a nécessairement un quatrième point commun avec Γ .

Si la droite t passe au point ω , le plan MNO est un plan tangent à la courbe gauche au point de vue O . D'après nos conventions, il

rencontre Γ en 4 points dont 2 confondus au point O et le raisonnement se poursuit comme ci-dessus.

Enfin le plan MNO ne peut se confondre avec le plan osculateur en O à Γ car dans ce cas sa trace t sur le plan de projection serait tangente en ω à la cubique et l'un des points M ou N coïnciderait avec O, ce que nous n'avons pas supposé.

On démontrerait de même qu'un plan ne peut couper Γ en un seul point.

28. — Voyons maintenant quelles singularités peut présenter la courbe Γ . Un continu gauche borné du quatrième ordre peut admettre un point de ramification commun à trois arcs au moins ne se rencontrant pas par ailleurs (1). Un tel point sur notre courbe projectivement fermée est un point double. On peut trouver aussi sur Γ une pointe dont la perspective sur un plan quelconque à partir d'un point de vue arbitraire est un rebroussement.

En dehors du point double et de la pointe (lorsqu'ils existent) tous les points de la courbe sont simples. Nous dirons qu'un point simple est *ordinaire* lorsque le plan osculateur en ce point rencontre la courbe en dehors de lui. Les points simples qui ne sont pas des points ordinaires sont, comme nous l'avons dit plus haut (n° 27), des points de surosculation. Nous allons montrer que chacun de ces points appartient à un petit arc dont tous les autres points sont ordinaires. Nous établirons d'abord le lemme suivant qui comprend deux parties :

1° *On ne peut trouver sur la courbe un arc dont tous les points seraient des points de surosculation.*

2° *Un arc de la courbe ne peut comprendre une infinité de points de surosculation qui admettent un de ses points pour point limite.*

DÉMONSTRATION. — *Première partie* : Soit $\widehat{MN}$ un arc dont tous les points sont par hypothèse points de surosculation et P l'un d'eux, intérieur à l'arc. Le plan π défini par ce point P et la tangente à l'arc en un point voisin P' a pour limite lorsque P' tend vers P le plan stationnaire en P. On peut donc prendre P' suffisamment voisin de P pour que le plan π rencontre l'arc $\widehat{MN}$ en un point Q' distinct

(1) A. MARCHAUD, Mém. cité (n° 1, note 2), p. 105.

de P et de P' et pour que ce point Q' soit voisin à volonté du point P .

Cela posé, la perspective de l'arc $\widehat{MN}$ faite du point de vue P est constituée par deux arcs $\widehat{mp}$ et $\widehat{pn}$ qui appartiennent à une cubique élémentaire. Sur l'arc $\widehat{pn}$ par exemple on trouve à partir du point p un arc convexe $\widehat{pq}$ qui est la projection d'un arc $\widehat{PQ}$ de la courbe gauche. Nous prendrons P' sur cet arc. Lorsque P' tend vers P , les points P' et Q' atteignent en même temps le point P . Si en effet Q' l'atteignait le premier, l'arc $\widehat{PQ}$ aurait un plan tangent double (dont la trace serait une tangente à l'arc convexe $\widehat{pq}$ qui rencontrerait cet arc au point p) et si P' se réunissait avec P , le point Q' restant distinct, l'arc $\widehat{MN}$ aurait un plan osculateur qui le rencontrerait en un point simple. Deux cas peuvent alors se produire :

1^{er} CAS. — Q' appartient à l'arc $\widehat{PQ}$ lorsque P' tend vers P . La trace du plan π sur le plan de projection est tangente à l'arc $\widehat{pq}$ et rencontre cet arc en un point distinct de son point de contact. C'est impossible puisque l'arc $\widehat{pq}$ est convexe.

2^e CAS. — Q' appartient à l'arc $\widehat{PM}$ lorsque P' tend vers P sur $\widehat{PQ}$ intérieur à $\widehat{PN}$. Les points P et P' sont d'un même côté de Q' et distincts comme nous l'avons vu. Si nous fixons Q' sur l'arc $\widehat{MN}$ et faisons tendre le point P vers lui, P' tend aussi vers lui et le plan $PP'Q'$ a pour limite le plan stationnaire en Q' . De plus P' et P tendent vers Q' en restant d'un même côté de ce point et distincts. On retombe ainsi dans le 1^{er} cas en prenant pour point de vue le point Q' au lieu du point P et on aboutit de même à une impossibilité.

Deuxième partie : Montrons ensuite que l'arc $\widehat{MN}$ ne peut contenir une infinité de points de surosculation qui admettent le point P pour point limite.

Si tel était le cas, prenons l'un de ces points de surosculation pour point P' et supposons-le sur l'arc $\widehat{PN}$ par exemple. Le point Q' appartient alors à l'arc $\widehat{PN}$ ou à l'arc $\widehat{PM}$.

Si Q' est un point de l'arc $\widehat{PN}$ comme P' , l'arc convexe $\widehat{pn}$ (projeté du point de vue P) est rencontré en q' par sa tangente en p' , ce qui ne peut avoir lieu.

Si Q' coïncide avec un point Q'_1 de l'arc $\widehat{PM}$, faisons tourner le plan $P'PQ'$ autour de la tangente en P' , de manière que son point d'intersection avec la courbe initialement en P tende vers P' le long de l'arc $\widehat{PN}$. Le point Q' tend aussi vers P' . Il ne peut franchir le

point P sinon on retomberait dans le cas précédent. Q' s'éloigne donc de P sur l'arc $\widehat{Q_1P'}$ qui ne contient pas P. Par un point T choisi arbitrairement sur cet arc on mène donc un plan tangent en P' qui rencontre encore l'arc $\widehat{PP'}$ intérieur à $\widehat{PN}$, et cela quel que soit le point P' appartenant à la suite des points d'osculution qui a pour limite le point P. Il en résulte que par T passerait un plan osculateur à la courbe en P ce qui contredit l'existence du point de surosculation en P. Ce cas est donc également impossible.

En résumé, tout point de surosculation est seul de son espèce sur un arc de la courbe convenablement choisi. Tout autre point de cet arc est ordinaire à moins qu'il ne soit point double ou pointe. Puisque la courbe n'admet comme point singulier en dehors des points de surosculation qu'un point double ou une pointe, nous avons bien établi le résultat annoncé au début de ce numéro :

Tout point singulier de la courbe est intérieur à un petit arc dont tous les autres points sont des points ordinaires.

29. — Nous terminerons ces généralités en étudiant les particularités de la cubique perspective de Γ lorsque le point de vue est un point de surosculation sur la courbe gauche.

Le plan stationnaire en un tel point O peut être considéré comme la limite d'un plan tangent en O qui rencontre Γ en deux points voisins de O et qui tendent tous deux vers O. L'image du point O sur le plan de projection est la trace ω de la tangente en O et il existe dans le plan de projection des droites qui passent par ω et rencontrent la courbe élémentaire γ perspective de Γ en deux points voisins à volonté de ω . Ce point est sur γ un rebroussement de deuxième espèce ou un point d'inflexion. La courbe γ ne peut donc être un ovale ; c'est une courbe du troisième ordre et le point ω est un point d'inflexion.

Réciproquement, quand la perspective de Γ est une cubique qui a une inflexion à l'image du point de vue, la tangente d'inflexion est la trace d'un plan stationnaire et le point de vue est point de surosculation sur la courbe.

CHAPITRE II.

Méthodes et Théorèmes généraux.

30. — Nous étudierons dans les prochains chapitres la courbe du quatrième ordre sans point double ni pointe, la courbe à point double et la courbe à pointe. La première de ces courbes présente des types différents suivant qu'elle admet ou non des trisécantes. Une droite peut rencontrer en effet la courbe en trois points au plus. S'ils sont distincts la droite est une trisécante ordinaire : si deux d'entre eux sont confondus, nous dirons que la droite est une trisécante de contact. Si les trois points se confondaient en un seul nous appellerions la droite une trisécante d'inflexion. Il est évident qu'en un point de la courbe ne peut passer plus d'une trisécante.

Nous examinerons successivement la courbe sans trisécante, point double ni pointe, la courbe à trisécantes, la courbe à point double ou pointe. La méthode que nous emploierons dans cette étude, consiste à examiner la correspondance qui existe entre le point de contact d'un plan osculateur et le point simple où ce plan rencontre la courbe. Nous désignerons par A le point d'osculation, par B le point d'intersection. Soient a et b les valeurs pour ces deux points du paramètre dont dépend le point courant de la courbe. b est déterminé dès qu'on connaît a et varie continuellement avec lui. La correspondance $b = b(a)$ est univoque et continue. En particulier, lorsque A atteint un point de surosculation sur la courbe, on a $b(a) = a$. Le point B étant donné, il peut exister plusieurs plans osculateurs concourant en ce point et qui touchent la courbe en dehors de B . Prenons l'un de ces plans, désignons par A son point d'osculation et suivons-le lorsque B décrit la courbe. Nous définissons ainsi une correspondance $a = a(b)$ continue et biunivoque. Lorsque B se meut dans un sens donné, le point A va dans un sens toujours le même. Car le plan osculateur est unique en chaque point de la courbe.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les théorèmes généraux qui nous serviront par la suite :

31. — THÉORÈME I : *Un point A et son correspondant B ne peuvent*

coexister sur un arc sans trisécante joignant deux points de surosculation consécutifs d'une courbe gauche du quatrième ordre.

Soient S_1, S_2 deux points de surosculation consécutifs ; des deux arcs qu'ils déterminent sur la courbe projectivement fermée, l'un ne contient aucun point de surosculation comme point intérieur. Soit $\widehat{S_1 S_2}$ cet arc.

Nous supposons qu'il existe un couple $[A, B]$ sur cet arc. Dans le

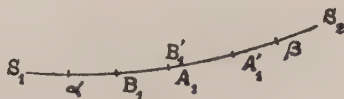


FIG. 9.

cas où par le point B passeraient plusieurs plans osculateurs touchant l'arc en A', A'' ... nous choisirions celui de ces points d'osculation qui est le plus proche de B sur l'arc et c'est lui que nous appellerions A . Quand B décrit l'arc de S_1 vers S_2 , le point A se déplace dans un sens déterminé, toujours le même ; sinon on trouverait sur l'arc des points qui seraient atteints par le point A quand il se déplacerait vers S_2 et aussi quand il reviendrait vers S_1 ; le point B se mouvant par hypothèse de S_1 vers S_2 , il y aurait sur l'arc des points où existeraient plusieurs plans osculateurs. Le sens du mouvement de A est donc constant. Il ne peut être inverse de celui de B car il y aurait une coïncidence (A, B) donc un point de surosculation, intérieur à l'arc. Les points A et B se dirigent donc en même temps de S_1 vers S_2 et ils se confondent en S_2 quand B l'atteint. On peut supposer que dans ce mouvement le point A est constamment plus voisin de S_2 que son correspondant B (dans le cas contraire, on raisonnerait sur S_1 au lieu de S_2). Les deux points A et B appartiennent donc à un arc $\widehat{\alpha S_2}$ (dont l'extrémité α est un point intérieur à $\widehat{S_1 S_2}$) dès que B appartient à cet arc. On peut choisir le point α tel que l'arc $\widehat{\alpha S_2}$ n'ait pour points intérieurs que des points ordinaires puisque tous les points intérieurs de l'arc $\widehat{S_1 S_2}$ sont ordinaires sauf éventuellement un point qui pourrait être point double ou pointe (chap. I n° 28). Enfin nous prendrons sur l'arc $\widehat{\alpha S_2}$ un point β tel que l'arc $\widehat{\alpha \beta}$ ne contienne qu'un point A correspondant au point B .

En résumé, le couple $[A, B]$ est constitué par deux points inté-

rieurs à un arc $\widehat{\alpha\beta}$ de $\widehat{S_1S_2}$ dont tous les points sont ordinaires. Les paramètres des points A et B vérifient la relation

$$b < a \quad \text{en supposant } s_1 < s_2$$

Soit B_1, A_1 une position du couple $[A, B]$ sur l'arc $\widehat{\alpha\beta}$. Quand B vient en A_1 , A vient en A'_1 tel que

$$1) \quad b_1 < a_1 < a'_1$$

Prenons pour point de vue le point $A_1 = B'_1$ et faisons une perspective de l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ sur un plan qui ne passe pas au point de vue. Cette perspective est un arc du troisième ordre qui admet pour toute singularité un point d'inflexion en A'_2 projection de A'_1 . Cet arc appartient à une cubique plane projectivement fermée et se compose de deux arcs élémentaires $\widehat{\alpha_2A'_2}$ et $\widehat{A'_2\beta_2}$.



FIG. 10.

Un point sur l'arc gauche $\widehat{\alpha\beta}$ et son image sur $\widehat{\alpha_2\beta_2}$ ont le même paramètre. Le point B_1 situé dans le plan osculateur à $\widehat{\alpha\beta}$ au point de vue se projette en B_2 sur la tangente en A_2 à l'arc $\widehat{\alpha_2\beta_2}$. Les deux points A_2 et B_2 sont donc chacun sur l'un des arcs $\widehat{\alpha_2A'_2}$ et $\widehat{A'_2\beta_2}$ et leurs paramètres vérifient les inégalités.

$$a_1 < a'_1 < b_1 \quad \text{ou} \quad b_1 < a'_1 < a_1$$

incompatibles avec les inégalités (1). Ainsi l'existence d'un couple $[A, B]$ sur l'arc $\widehat{S_1S_2}$ conduit à une contradiction, ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME II : *Pour qu'un arc appartenant à la courbe gauche du quatrième ordre soit élémentaire, il faut et il suffit :*

- 1° qu'il n'ait ni trisécante, ni point double, ni pointe ;
- 2° qu'aucun couple de points $[A, B]$ ne puisse exister sur lui.

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Supposons-les vérifiées et montrons que l'arc $\widehat{MN}$ est du troisième ordre. S'il était du

quatrième ordre, on trouverait un plan qui le coupe en 4 points distincts. Prenant un de ces points pour point de vue, l'arc se projetterait suivant un arc plan $\widehat{mn}$ qu'une sécante rencontrerait en 3 points distincts et traverserait en chacun de ces points. Cet arc de courbe élémentaire $\widehat{mn}$ sans pointe ni point double aurait une inflexion à laquelle correspondrait sur $\widehat{MN}$ un plan osculateur passant au point de vue. L'arc $\widehat{MN}$ ne peut donc être d'ordre 4. C'est un arc élémentaire.

32. — Nous allons maintenant établir une propriété des plans osculateurs à la courbe qui est liée à l'existence d'une trisécante de contact. Précisons d'abord les particularités d'une perspective de la courbe à trisécantes.

La perspective de la courbe (supposée sans point double ni pointe) lorsque le point de vue est un point de cette courbe où passe une trisécante ordinaire est une cubique élémentaire à point double pourvue d'une inflexion. Quand le point de vue est le point d'intersection de la courbe avec une trisécante de contact, la perspective est une cubique à rebroussement qui a également un point d'inflexion. Enfin quand le point de vue est un point de la courbe où ne passe aucune trisécante, la perspective est une cubique qui a trois points d'inflexion. Comme un point d'inflexion sur la courbe plane correspond à un plan osculateur à la courbe gauche issu du point de vue, on peut énoncer : *Par un point P de la courbe Γ situé sur une trisécante ordinaire passe un plan osculateur et un seul dont le point d'osculation est distinct de P . Par le point d'intersection d'une trisécante de contact avec la courbe passe un seul plan osculateur dont le point d'osculation est hors de la trisécante. Trois plans osculateurs concourent en P si ce point n'est sur aucune trisécante.*

Voici maintenant la propriété du plan osculateur liée à l'existence d'une trisécante de contact :

THÉORÈME III : *Soient A' , A'' , A''' les points de contact des trois plans osculateurs qui concourent en un point B de la courbe. Pour que deux de ces points se réunissent lorsque B parcourt la courbe, il faut et il suffit que B vienne au point d'intersection d'une trisécante de contact.*

Nous supposons que le point A_1 de la courbe où concourent les

points A' et A'' par exemple est distinct de la position B_1 occupée sur la courbe par le point B .

La condition est nécessaire. — Lorsque B décrit la courbe dans un sens donné, chacun des points A' et A'' va dans un sens déterminé, sinon on trouverait des points de la courbe où existeraient plusieurs plans osculateurs. Pour la même raison, le point A'' ne peut atteindre sur la courbe un point qui est occupé par A' pour une autre position de B . Ainsi les points A' et A'' ne peuvent tendre vers A_1 en se déplaçant dans le même sens. Ils vont en sens contraire l'un de l'autre et quand ils atteignent le voisinage de A_1 il existe sur la courbe un petit arc $\widehat{A'A''}$ dont le point A_1 est un point intérieur.

Puisque A_1 et B_1 sont distincts par hypothèse, le point B peut

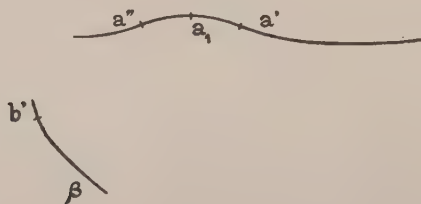


FIG. 11.

être choisi assez voisin de B_1 sur un arc $\widehat{B_1\beta}$ de la courbe pour qu'aucun point de cet arc n'appartienne à l'arc $\widehat{A'A''}$. Cela posé, soit B' une position de B sur cet arc $\widehat{B_1\beta}$, A' et A'' les points de contact des deux plans osculateurs passant par B' . Projurons Γ à partir du point de vue B' sur un plan quelconque et désignons sur la cubique C obtenue les points par des lettres minuscules. Un arc intérieur à $\widehat{a'a''}$ est élémentaire, car la cubique est complètement continue, sans pointe ni point double. Une tangente en un point de cet arc traverse la cubique C en un point extérieur à l'arc et quand son point de contact décrit l'arc de a' vers a'' le point d'intersection parcourt l'arc complémentaire sur la courbe C . Il existe donc un point intérieur à $\widehat{a'a''}$ où la tangente à la cubique C passe au point b' , image du point de vue. Sur la courbe gauche la tangente au point B' rencontre la tangente en un point intérieur de l'arc $\widehat{A'A''}$ qui correspond à B' . Ce résultat est valable pour tout point B' intérieur à l'arc $\widehat{B_1\beta}$.

Formons maintenant sur l'arc $\widehat{B_1\beta}$ une suite de points $B'_1, B'_2, \dots, B'_n \dots$ qui tendent vers B_1 . Il lui correspond dans le voisinage de A_1 sur Γ une suite d'arcs $\widehat{A'_1A''_1}, \widehat{A'_2A''_2}, \dots, \widehat{A'_nA''_n}, \dots$ tels que :

- 1° la tangente à Γ au point B'_n rencontre la tangente en un point M_n de l'arc $\widehat{A'_nA''_n}$ correspondant ;
- 2° chacun de ces arcs contient le suivant ;
- 3° le point A_1 est pour chacun d'eux un point intérieur.

Ces arcs admettent donc le point A_1 pour point limite et il en est de même de la suite $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$. Donc quand le point B'_n tend vers B_1 , le point M_n tend vers A_1 et la tangente en B_1 à Γ rencontre la tangente en A_1 . Deux cas peuvent alors se présenter :

a) Ces deux tangentes sont distinctes de la droite B_1A_1 . Le plan osculateur à Γ en A_1 toucherait la courbe en dehors du point d'osculation A_1 . Ce cas n'est pas à retenir d'après nos conventions du n° 27. Il en est de même si la tangente en B_1 coïncide avec la droite B_1A_1 .

b) La droite B_1A_1 est confondue avec la tangente à Γ en A_1 . Cette droite est une trisécante de contact dont le point B_1 est le point d'intersection. La première partie de la démonstration est établie.

La condition est suffisante. — Soit B_1 le point simple d'une trisécante de contact qui touche la courbe en A_1 . La perspective de la courbe avec B_1 pour point de vue est une cubique qui a une épine à la trace de la droite B_1A_1 et une tangente d'inflexion, trace d'un plan osculateur à la courbe gauche qui passe au point de vue et touche la courbe en un point A_2 . D'un point B' voisin de B_1 sur la courbe on mène par hypothèse trois plans osculateurs qui touchent la courbe en trois points distincts A', A'', A''' . L'un de ces points, A''' par exemple, est dans le voisinage de A_2 et tend vers A_2 lorsque B' tend vers B_1 . Un autre, A' par exemple, est dans le voisinage de A_1 . La continuité du plan osculateur exige que lorsque B' tend vers B_1 , le point A'' tende soit vers A_2 soit vers A_1 . S'il venait en A_2 la droite B_1A_2 serait d'après la première partie du théorème une trisécante de contact et par B_1 passeraient deux trisécantes, ce qui est impossible. Les deux points A' et A'' se confondent donc au point A_1 et le théorème est démontré.

33. — Nous compléterons ce théorème sur la propriété du plan osculateur liée à l'existence d'une trisécante de contact par un énoncé qui sera le dernier de nos théorèmes généraux :

THÉORÈME IV : *Un point A décrivant la courbe dans un sens donné, son correspondant B change de sens lorsque A passe au point de contact d'une trisécante de contact et dans ce cas seulement.*

Soit B_1 un point de la courbe où B rétrograde sur l'arc $\widehat{B_1\beta}$. Ce point B_1 correspond à une position A_1 du point A. Par un point B' voisin de B_1 sur l'arc $\widehat{B_1\beta}$ on mène à la courbe deux plans osculateurs dont les points de contact A' et A'' sont voisins de A_1 et de part et d'autre de ce point. Lorsque B' tend vers B_1 les points A' et A'' se réunissent en A_1 et d'après le théorème III une trisécante de contact touche la courbe en ce point.

Réciproquement, quand le point A atteint A_1 son correspondant B atteint le point simple B_1 de la trisécante de contact A_1B_1 . Quatre cas peuvent alors être envisagés :

- 1° les deux arcs $\widehat{B_1\beta}$ et $\widehat{B_1\beta'}$ de la courbe au voisinage du point B_1 admettent des trisécantes en tout point ;
- 2° aucun de ces arcs n'admet de trisécante ;
- 3° l'un de ces arcs $\widehat{B_1\beta}$ admet des trisécantes et B tend vers B_1 le long de cet arc ;
- 4° $\widehat{B_1\beta}$ admet des trisécantes et B tend vers B_1 le long de l'arc $\widehat{B_1\beta'}$ sans trisécante.

1^{er} cas. — Le point B est sur l'arc $\widehat{B_1\beta}$ qui admet des trisécantes ainsi que $\widehat{B_1\beta'}$. Si B rebroussait chemin en B_1 on trouverait sur l'arc $\widehat{B_1\beta}$ des points intérieurs d'où l'on mènerait à la courbe deux plans osculateurs dont les points de contact seraient voisins de A_1 . Ce résultat contredit l'existence d'une trisécante en tout point de $\widehat{B_1\beta}$. Le point B ne peut rétrograder et quand A franchit A_1 , B franchit B_1 . Or on mène à la courbe par B_1 un plan osculateur qui la touche en un point A_2 distinct de A_1 . D'un point B voisin de B_1 on mène donc à la courbe deux plans osculateurs qui la touchent respectivement en A'_1 et A'_2 dans le voisinage de A_1 et A_2 , résultat inacceptable puisque B est sur une trisécante (1). Ainsi les deux arcs $\widehat{B_1\beta}$ et $\widehat{B_1\beta'}$ ne peuvent admettre tous deux des trisécantes.

(1) Il est impossible que BA'_1 soit une trisécante de contact car sa perspec-

2^e CAS. — Aucun de ces arcs n'admet de trisécante. A un point B qui appartient à l'un d'eux correspondent trois points A', A'', A''' et, d'après le théorème III, deux de ces points sont voisins de A₁ et de part et d'autre. A un point A voisin de A₁ sur Γ correspondraient donc deux points B, l'un intérieur à l'arc $\widehat{B_1\beta}$, l'autre intérieur à l'arc $\widehat{B_1\beta'}$ ce qui est impossible. On voit en passant qu'une trisécante de contact ne peut être isolée.

3^e CAS. — L'arc $\widehat{B_1\beta}$ admet seul des trisécantes et B tend vers B₁ sur cet arc. S'il franchissait B₁ quand A franchit A₁, il appartiendrait à un arc sans trisécante et il lui correspondrait, en outre du point A postérieur à A₁, un point A' antérieur. Mais à ce point A' correspond un point B sur $\widehat{B_1\beta}$. D'autre part, le point B ne peut rétrograder sur l'arc $\widehat{B_1\beta}$ à trisécantes car d'un point B' de cet arc on mènerait alors à la courbe deux plans osculateurs qui la toucheraient au voisinage de A₁ et ce résultat est incompatible avec l'existence d'une trisécante en B'. Le 3^e cas est à rejeter comme les précédents.

4^e CAS. — L'arc $\widehat{B_1\beta'}$ admet seul des trisécantes et B tend vers B₁ le long de $\widehat{B_1\beta}$. A une position B' de B sur cet arc correspondent un point A' antérieur à A₁ et un point A'' postérieur et à tout couple tel que (A', A'') correspond un point B' intérieur à $\widehat{B_1\beta}$. Le point B rétrograde donc en B₁ quand A franchit A₁.

Le théorème est donc établi. Nous avons en même temps démontré qu'une trisécante de contact ne peut être isolée. L'un des arcs dans le voisinage de son point d'intersection avec la courbe admet des trisécantes. Nous verrons plus loin (chapitre V, n° 39) que ce sont des trisécantes ordinaires.

34. — Nous terminerons ce chapitre en rappelant le *principe de correspondance*, maintes fois utilisé par JUEL et dont nous aurons également à faire usage :

Soit sur une courbe projectivement fermée des points X et des points Y en correspondance continue. A chaque point X correspondent p points Y et à chaque point Y q points X. Enfin les points X comme les points Y se déplacent tous dans le même sens. Si les sens de déplacement des points X et des points Y sont contraires, il y a $p + q$ points de coïncidence.

tive faite de B₁ rencontrerait la projection C_{B₁} de la courbe en b voisin de a₁ laors que B appartient au voisinage de B₁.

CHAPITRE III.

La courbe sans trisécante, point double ni pointe.

35. — Nous prenons sur la courbe Γ un point de vue et la projetons sur un plan quelconque qui ne passe pas en ce point. La cubique élémentaire obtenue n'a ni pointe ni point double et possède trois points d'inflexion. Donc par un point ordinaire de la courbe gauche passent trois plans osculateurs qui la touchent en dehors de ce point. Si le point de vue est un point de surosculation, le plan stationnaire en ce point a pour trace sur le plan de projection l'une des tangentes d'inflexion. On mène donc deux plans osculateurs à la courbe par le point de vue, en dehors du plan stationnaire.

Soit maintenant sur la courbe gauche un couple $[A, B]$. Lorsque le point A décrit Γ dans un sens déterminé, son correspondant B se déplace dans un sens toujours le même. Le point B ne pourrait en effet rétrograder qu'au point simple d'une trisécante de contact, d'après le théorème IV, et la courbe n'admet par hypothèse aucune trisécante.

Ainsi quand le point A décrit la courbe Γ dans un sens donné, le point B va toujours dans le même sens. Nous avons vu qu'à chaque position de B correspondent trois positions de A . Donc quand A décrit une fois la courbe, le point B la décrit trois fois.

Supposons que A et B puissent décrire la courbe dans le même sens. Il y aura alors des points de coïncidence. Soient S_1, S_2 deux tels points consécutifs et faisons décrire au point A celui des deux arcs $\widehat{S_1 S_2}$ qui ne contient à son intérieur aucun point de coïncidence. Il existe des positions de A suffisamment voisines de S_2 par exemple pour que le point B soit intérieur à l'arc $\widehat{S_1 S_2}$. Mais ce résultat contredit le théorème I.

Ainsi les sens de parcours des points A et B sur Γ sont inverses l'un de l'autre. Le principe de correspondance appliqué à la correspondance univoque (1 — 3) entre les points B et A montre immédiatement qu'il y a 4 points de coïncidence. La courbe a 4 plans stationnaires.

Leurs points de surosculation déterminent sur Γ quatre arcs qui vérifient les conditions du théorème II. Ce sont des arcs élémentaires.

La courbe gauche du quatrième ordre sans point double ni pointe ni trisécante a 4 plans stationnaires. Elle est composée de 4 arcs élémentaires qui se raccordent aux points de contact de ces plans.

Il résulte immédiatement de ce théorème que la perspective de la courbe à partir d'un point de vue quelconque est une courbe élémentaire.

CHAPITRE IV.

La courbe à trisécantes ordinaires.

36. — Nous supposons maintenant que la courbe a des trisécantes et nous nous occuperons d'abord de la courbe à trisécantes ordinaires. Nous allons établir que *si la courbe Γ admet une telle trisécante, elle en admet une infinité.*

Supposons qu'il puisse exister une trisécante ordinaire isolée passant en un point B_1 de la courbe. On peut trouver sur Γ un arc $\widehat{\beta\beta'}$ dont le point B_1 est un point intérieur et qui n'est rencontré par aucune trisécante, celle qui passe au point B_1 exceptée. On peut d'ailleurs choisir cet arc assez petit pour qu'aucun de ses points, sauf éventuellement le point B_1 , ne soit un point de surosculation sur la courbe. Supposons d'abord que le point B_1 est point ordinaire. On mène de ce point à la courbe un plan osculateur unique dont le point d'osculution A_1 est distinct de B_1 . Par un point B' de l'arc $\widehat{B_1\beta}$ on mène à la courbe trois plans osculateurs qui la touchent en trois points distincts A' , A'' , A''' dont l'un au moins, A''' par exemple, tend vers le point A_1 lorsque B' tend vers B_1 sur l'arc $\widehat{B_1\beta}$. Quand B' décrit cet arc de β vers B_1 , les points A' et A'' se déplacent chacun dans un sens déterminé, sinon il existerait des points où la courbe admettrait plusieurs plans osculateurs. Enfin les points A' et A'' sont distincts et distincts de A''' pour toute position du point B' , d'après le théorème III, puisque l'arc $\widehat{B_1\beta}$ n'est rencontré par aucune trisécante de contact. Il résulte alors de la continuité du plan osculateur que du point B_1 on mènerait trois plans osculateurs à la courbe, ce qui n'a pas lieu.

Supposons maintenant B_1 point de surosculation. Une perspective de la courbe à partir du point de vue B_1 a un point double et

une inflexion dont la tangente est la trace du plan stationnaire en B_1 . Lorsqu'un point B' décrit l'arc $\widehat{B_1\beta}$ les trois points A' , A'' , A''' qui lui correspondent sont comme dans le premier cas distincts et se déplacent dans un sens déterminé ; l'un d'eux, A''' par exemple, tend vers B_1 en même temps que B' . La continuité du plan osculateur exige que A' et A'' tendent également vers B_1 . D'après le théorème I ces trois points atteignent le point B_1 en se déplaçant sur l'arc $B_1\beta'$ puisque B' se déplace sur $\widehat{B_1\beta}$. On peut donc choisir B' assez voisin de B_1 pour que les trois points A' , A'' , A''' appartiennent à l'arc $\widehat{B_1\beta'}$. Si un point A décrit cet arc de A' vers A'' , son correspondant B part de B' , s'en éloigne puis revient en B' ; d'après le théorème IV, le couple $[A, B]$ a rencontré dans ce mouvement une trisécante de contact et l'arc $\widehat{B_1\beta'}$ admet une telle trisécante, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, l'existence d'une trisécante ordinaire isolée conduit à une contradiction et la courbe Γ admet une infinité de trisécantes qui forment une surface réglée.

37. — Puisqu'il n'existe par hypothèse aucune trisécante de contact ni d'inflexion, par tout point B de la courbe passe une trisécante ordinaire et un plan osculateur dont le point de contact A est en général distinct de B . Quand le point A décrit la courbe dans un sens donné, le point B se déplace toujours dans le même sens, car il ne pourrait rétrograder que sur une trisécante de contact (Théorème IV). Nous allons montrer que les sens de parcours des points A et B sont les mêmes et qu'il ne peut y avoir aucun point de sur-osculation.

Soit MNP une trisécante fixe. Les trois points M , N , P déterminent trois arcs $\widehat{MN}$, $\widehat{NP}$, $\widehat{PM}$ dont chacun ne contient aucun des points P , M ou N comme point intérieur. Soit QRS une trisécante mobile. Le point Q et les points R , S définissent une correspondance univoque et continue (1, 2). Quand le point Q décrit Γ dans un certain sens :

1° les points R et S se déplacent chacun dans un sens déterminé puisque par un point quelconque de Γ passe une trisécante et une seule ;

2° ces points sont toujours distincts puisqu'il n'existe par hypothèse aucune trisécante de contact.

Ainsi la correspondance entraînerait 3 points de coïncidence si le sens commun aux points R et S était inverse de celui de Q. Comme il ne peut y avoir de point de coïncidence, les 3 points Q, R, S décrivent la courbe dans le même sens.

Il résulte de là que lorsque Q décrit l'arc $\widehat{MN}$, les points R et S se déplacent respectivement sur $\widehat{NP}$ et $\widehat{PM}$. Toute trisécante rencontre donc exactement en un point chacun de ces arcs.

38. — Projétons maintenant la courbe sur un plan à partir du point M pris pour point de vue. La cubique élémentaire plane obtenue a un point double qui est la projection commune d des points N et P. Le point de vue se projette à la trace m de la tangente en M à Γ . Je dis que ce point m est nécessairement sur la pseudo-branchette paire relative au point double d (fig. 13).

S'il était en effet sur la pseudo-branchette impaire (fig. 12), les

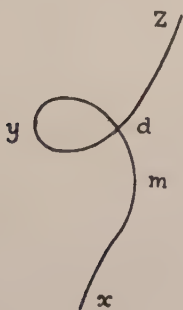


FIG. 12.

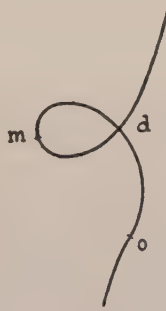


FIG. 13.

arcs $\widehat{MN}$, $\widehat{NP}$, $\widehat{PM}$ auraient respectivement pour projections les arcs $\widehat{md}$, $\widehat{dyd}$, $\widehat{dzm}$. Une trisécante quelconque distincte de MNP aurait pour projection une droite qui rencontrerait en 3 points distincts la cubique. Cette droite devrait avoir un point sur chacun des arcs qui sont les perspectives de $\widehat{MN}$, $\widehat{NP}$, $\widehat{PM}$. Or c'est impossible car toute droite qui rencontre la pseudo-branchette paire $\widehat{dyd}$ la rencontre en deux points.

Ainsi le point m est sur la boucle de la cubique. L'arc $\widehat{NP}$ se projette donc suivant la pseudo-branchette impaire et le plan osculateur mené par M à Γ a son point de contact O sur $\widehat{NP}$. Ce point est tou-

jours distinct du point M. Il n'y a aucun plan stationnaire et les points M et O décrivent la courbe dans le même sens.

Chacun des arcs $\widehat{MN}$, $\widehat{NP}$, $\widehat{PM}$ satisfait aux conditions du théorème II. Ce sont des arcs élémentaires. Ainsi :

La courbe du quatrième ordre qui admet une trisécante par chacun de ses points peut être décomposée d'une infinité de manières en trois arcs élémentaires dont les extrémités sont situées sur une trisécante quelconque. La courbe n'a aucun plan stationnaire.

La courbe n'a aucun plan bitangent. Un tel plan qui la toucherait au point de vue M aurait pour perspective une tangente à la cubique qui rencontrerait la boucle en m et couperait ainsi la cubique en 4 points.

Enfin la perspective de la courbe à partir d'un point de vue quelconque est une courbe élémentaire.

CHAPITRE V.

La courbe à trisécantes de contact.

39. — Nous supposons dans ce chapitre que la courbe Γ admet au moins une trisécante de contact A_1B_1 qui la touche en A_1 . Prenons ce point pour point de vue ; la perspective de Γ est une cubique élémentaire qui a un point double à la trace de la trisécante A_1B_1 et les tangentes en ce point sont la trace du plan osculateur en A_1 et la perspective de la tangente en B_1 à la courbe gauche : elles sont distinctes. La cubique a par ailleurs un point d'inflexion et l'on mène de A_1 un plan osculateur à Γ qui touche cette courbe en un point A_2 distinct de A_1 .

Nous avons vu (n° 33) que la trisécante A_1B_1 ne peut être isolée et que l'un des arcs de Γ qui aboutissent à son point d'intersection B_1 est rencontré dans le voisinage de ce point par des trisécantes. Montrons que ce sont des trisécantes ordinaires qui coupent la courbe en trois points distincts. Soit $\widehat{B_1\beta}$ l'arc voisin de B_1 par tout point duquel passe une trisécante. Une trisécante de contact ne peut avoir sur cet arc un point simple, car il le diviserait en deux arcs

dont l'un ne devrait être rencontré par aucune trisécante (n° 33). Si une trisécante touchait cet arc en un point γ , il existerait un arc intérieur à $\widehat{B_1\gamma}$ que ne rencontrerait aucune trisécante de contact, ce qui établirait la proposition. Celle-ci n'est donc en défaut que s'il existe sur l'arc $\widehat{B_1\beta}$ une suite S de points ayant B_1 pour point limite et donc chacun soit le point de contact d'une trisécante. Dans ce cas, les points simples de ces trisécantes forment sur la courbe une suite qui tend vers le point A_1 . La perspective de la courbe Γ à partir du point B_1 est une cubique C_{B_1} qui a une épine en a_1 trace de la droite B_1A_1 . Le point de vue B_1 se projette en un point b_1 de cette cubique et la tangente à la courbe plane en ce point traverse cette courbe en un point t distinct de a_1 . On peut trouver sur la cubique un petit arc $\widehat{at\alpha'}$ dont le point t est un point intérieur et qui ne contient pas a_1 . Une trisécante de contact distincte de A_1B_1 se projette suivant une tangente à la cubique. Il existe donc dans le voisinage de b_1 sur la cubique une suite de points, images des points de la suite S , et les tangentes en ces points à la courbe C_{B_1} rencontrent l'arc $\widehat{at\alpha'}$; la suite des points d'intersection ne peut avoir pour point limite le point a_1 qui est extérieur à cet arc.

Les trisécantes voisines de A_1B_1 sont donc ordinaires. Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la répartition des trisécantes de contact sur la courbe.

40. — Soit MNP une trisécante mobile qui coïncide initialement avec A_1B_1 , le point M en B_1 , les points N et P confondus en A_1 . Quand elle se déplace de manière que M s'éloigne de B_1 , les points N et P s'éloignent tous deux de A_1 , chacun sur l'un des arcs de Γ qui aboutissent en ce point. L'un des points N et P , soit N , se déplace donc en sens inverse du point M et le rencontre en un point A_2 avant que M n'ait atteint le point A_1 . Le point P occupe alors une position B_2 . Quand M dépasse le point A_2 , le point N s'éloigne de lui et P qui a rebroussé chemin en B_2 vient à sa rencontre et le croise en un point qui ne peut être que A_1 . Si en effet M et P se croisaient en un point C différent de A_1 , ce point serait intérieur à l'un des arcs $\widehat{A_2A_1}$ ou $\widehat{B_2A_1}$ et il passerait par ce point une trisécante de contact. C'est impossible puisque par tout point intérieur à $\widehat{A_2A_1}$ ou $\widehat{B_2A_1}$ il passe une trisécante ordinaire.

Ainsi à la trisécante de contact A_1B_1 en correspond une deuxième

A_2B_2 et une seule telle qu'on peut passer de l'une à l'autre en déplaçant le long de la courbe une trisécante ordinaire. Donc :

THÉORÈME : *Les trisécantes de contact se présentent par couples. Un tel couple A_1B_1, A_2B_2 donne sur la courbe une succession de points dans l'ordre $B_1A_2A_1B_2$.*

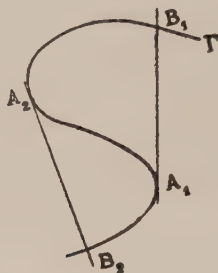


FIG. 14.

S'il existe deux couples A_1B_1, A_2B_2 ; A_3B_3, A_4B_4 les raisonnements précédents sont valables pour chacun d'eux et les points se succèdent sur la courbe dans l'ordre indiqué sur la représentation circulaire de la figure 15.

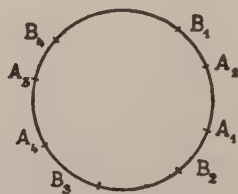


FIG. 15.

41. — Nous pouvons maintenant dénombrer les trisécantes de contact :

Prenons pour point de vue le point d'intersection B_1 de Γ avec la trisécante A_1B_1 . La cubique C_{B_1} a un rebroussement au point a_1 trace de B_1A_1 et le point B_1 se projette en b_1 . L'un des arcs qui joignent les points a_1 et b_1 sur cette cubique est convexe. Une tangente en un point a_2 de cet arc ne le recoupe pas et l'on peut placer sur l'arc un point a_2 où la tangente rencontre encore la cubique en

b_2 de manière à avoir la succession de points $b_1 a_2 a_1 b_2$ (fig. 16).

De même, d'un point b_2 de l'arc convexe $a_1 b_1$ on mène à la courbe une tangente qui la touche en dehors de cet arc, ce qui donne encore la succession $b_1 a_2 a_1 b_2$ (fig. 17). La trisécante de contact $A_2 B_2$ couplée avec $A_1 B_1$ peut donc affecter en projection l'une ou l'autre des dispositions indiquées.

L'arc $b_1 b_2$ qui ne contient pas le point a_1 peut ou non contenir



FIG. 16.

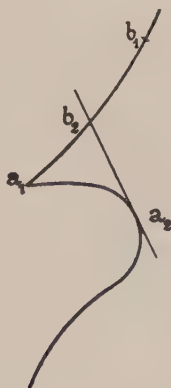


FIG. 17.

le point d'inflexion de la cubique. Cet arc est donc formé de deux ou d'un seul arc convexe. Dans le premier cas, on peut placer au voisinage du point d'inflexion une suite de points $b_3 a_4 a_3 b_4$ dans l'ordre voulu et il peut lui correspondre un deuxième couple de trisécantes de contact. Dans le second cas, ce second couple n'existe pas.

Quand il existe deux couples $B_1 A_2 A_1 B_2$ et $B_3 A_4 A_3 B_4$ les arcs $b_2 b_3$ et $b_4 b_1$ sont tous les deux convexes et l'on ne peut sur aucun de ces arcs insérer une suite de points correspondant à un nouveau couple de trisécantes de contact. Le nombre de ces trisécantes ne peut dépasser 4. Comme les courbes algébriques du quatrième degré fournissent des exemples de courbes possédant 2 ou 4 trisécantes de contact (1), on peut énoncer :

(1) CHASLES, Propriétés générales des courbes gauches tracées sur l'hyperboloïde. *C. R. de l'Ac. des Sc.*, vol. 53, 1861, p. 1077.

THÉORÈME : La courbe du quatrième ordre possède 0, 2 ou 4 trisécantes de contact.

Nous étudierons successivement la courbe à 4 trisécantes de con-



FIG. 18.

tact puis la courbe à 2 trisécantes de contact. A la fin du chapitre nous examinerons le cas où la courbe admettrait des trisécantes d'inflexion.

I. — La courbe à quatre trisécantes de contact.

42. — Soient $B_1A_2A_1B_2$ et $B_3A_4A_3B_4$ les arcs de cette courbe par les points desquels passent des trisécantes. Je dis qu'il n'existe aucun point de surosculation intérieur à chacun de ces arcs.

Par le point B_1 on mène à la courbe un plan osculateur et un seul qui la touche hors de B_1 et qui est distinct du plan osculateur en A_1 . A son point de contact I_1 correspond sur la cubique C_{B_1} le point d'inflexion qui est situé, d'après les résultats du n° 41 entre les couples de points b_4a_3 et a_4b_3 . Le point I_1 est ainsi sur l'arc à trisécantes $\widehat{A_3A_4}$ et il en est de même du point I_2 où un plan osculateur mené par B_2 touche Γ .

Soit maintenant un couple $[A, B]$. Faisons décrire au point B l'arc $\widehat{B_1B_2}$ à trisécantes. Son correspondant unique A va de I_1 en I_2 et se déplace toujours dans le même sens puisqu'en chaque point de Γ n'existe qu'un plan osculateur. Le point A ne peut venir en A_1 car B devrait être alors en B_1 . Le point A décrit donc l'arc $\widehat{I_1I_2}$ intérieur à $\widehat{B_3B_4}$. Ainsi sur l'arc $\widehat{B_1B_2}$ (et de même sur $\widehat{B_3B_4}$) il n'y a aucun point de surosculation.

L'étude de la correspondance entre le point A et son homologue unique B est alors facile :

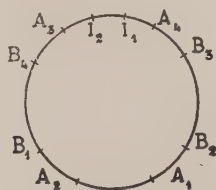


FIG. 19.

43. — Lorsque A part de A_1 et décrit la courbe dans le sens de la flèche, le point B part de B_1 , rétrograde quand il atteint les points B_2, B_3, B_4 et en ces points seulement (théo. IV), lorsque A atteint les points A_2, A_3, A_4 . Puisqu'il n'y a sur l'arc à trisécantes $\widehat{B_1B_2}$ aucun point de surosculation, le point B se déplace d'abord sur l'arc $\widehat{B_1B_4B_3B_2}$. Le mouvement du point B donne la succession suivante :

- A) $A_1 A_2 A_3 A_4 A_1$
 B) $B_1 B_2 B_3 B_4 B_1$

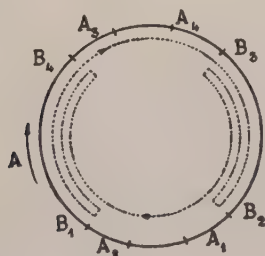


FIG. 20.

Il en résulte que les points A et B ne coexistent jamais sur l'un quelconque des arcs $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \widehat{A_3A_4}, \widehat{A_4A_1}$ et que la courbe n'admet aucun plan stationnaire. Une trisécante à l'arc $\widehat{B_1B_2}$ le rencontre comme nous l'avons vu (n° 40) en trois points qui appartiennent respectivement aux arcs $\widehat{B_1A_2}, \widehat{A_2A_1}, \widehat{A_1B_2}$. Les arcs $\widehat{A_1A_2}$ et $\widehat{A_2A_3}$ satisfont donc aux conditions du théorème II et sont élémentaires. Il en est de même des arcs $\widehat{A_3A_4}$ et $\widehat{A_4A_1}$. Ainsi :

La courbe du quatrième ordre qui présente quatre trisécantes de contact n'a pas de plan stationnaire. Elle est constituée par quatre arcs élémentaires (1).

Toute perspective de la courbe est une courbe élémentaire.

II. — La courbe à deux trisécantes de contact.

44. — Soient B_1A_1 et B_2A_2 ces trisécantes. Prenons le point B_1 pour point de vue. La perspective C_{B_1} est une cubique à rebroussement et nous avons vu (n° 41) que les points b_1, a_1, b_2, a_2 peuvent affecter sur cette courbe les positions respectives des figures 21 et 22.

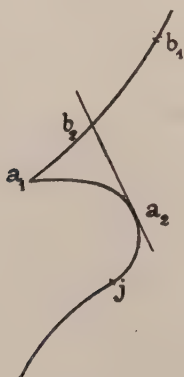


FIG. 21.

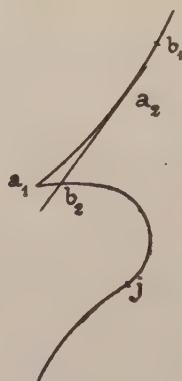


FIG. 22.

Le point d'inflexion j de la cubique n'est jamais sur celui des arcs $\widehat{a_1a_2}$ qui ne contient aucun des deux points b_1 et b_2 . Sur la courbe gauche, l'arc correspondant $\widehat{A_1A_2}$ ne contient pas les points de contact des plans osculateurs menés par les points B_1 et B_2 et différents des plans osculateurs en A_1 et A_2 .

Montrons que cet arc $\widehat{A_1A_2}$ ne contient aucun point de surosculation. Soit A le point de contact d'un plan osculateur mobile qui rencontre à nouveau la courbe en B . Faisons décrire au point B l'arc à trisécantes $\widehat{B_1B_2}$ en plaçant en J_1 la position initiale de A . Le point A se déplace toujours dans le même sens et aboutit néces-

(1) De la démonstration du Théorème III (n° 32) résulte l'existence d'une infinité de plans doublement tangents à la courbe.

sairement en J_2 ou A_2 . Dans ce mouvement, il ne peut passer au point A_1 , car B devrait alors être revenu en B_1 , ce qui n'a pas lieu. Ainsi quand le point B parcourt l'arc $\widehat{A_1 A_2}$, le point A est toujours extérieur à cet arc qui n'a par suite aucun point de surosculation.

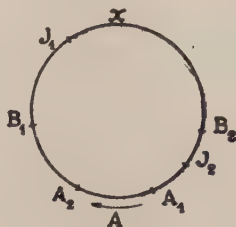


FIG. 23.

Il est désormais facile d'étudier les déplacements respectifs des points A et B. Faisons décrire au point A la courbe dans le sens de la flèche à partir de A_1 (fig. 23). Le point B se déplace d'abord sur l'arc $\widehat{B_1 X B_2}$ puisqu'il n'y a aucune coïncidence possible sur $\widehat{A_1 A_2}$. Il rebrousse chemin aux points B_2 et B_1 et en ces points seulement, lorsque A passe en A_2 et A_1 (théorème IV). Donc quand A dépasse la position A_2 , le point B revient en arrière sur l'arc $\widehat{B_2 X B_1}$ et décrit une fois la courbe jusqu'à revenir en B_1 lorsque A atteint A_1 .

Quelles que soient les positions respectives de J_1 et J_2 sur l'arc $\widehat{A_2 X A_1}$, il y a deux coïncidences des mobiles A et B, l'une S_1 sur l'arc $\widehat{A_2 B_1} + \widehat{B_1 X B_2}$, l'autre S_2 sur l'arc $\widehat{B_1 X B_2} + \widehat{B_2 A_1}$. La courbe a deux plans stationnaires.

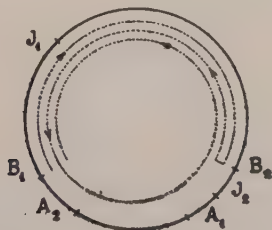


FIG. 24.

45. — Etudions maintenant le nombre des arcs élémentaires sur la courbe. Plusieurs cas sont à envisager suivant les positions des points S_1 et S_2 :

1^{er} CAS (fig. 25). — Les points S_1 et S_2 appartiennent tous deux à l'arc sans trisécante $\widehat{B_1 X B_2}$.

Il existe alors une position Σ_1 du point A sur l'arc $\widehat{A_1 A_2}$ telle que le point B qui lui correspond coïncide avec S_1 . Soit Σ un point quelconque intérieur à l'arc $\widehat{\Sigma_1 A_2}$. Faisons décrire au point A l'arc $\widehat{\Sigma A_2 S_1}$. Le point B initialement en S sur $\widehat{S_1 B_2}$ va en B_2 le long de cet arc $\widehat{S_1 X B_2}$ puis revient en S_1 en décrivant le même arc en sens inverse. L'arc $\widehat{\Sigma S_1}$ n'a donc aucun point de surosculation. Il vérifie

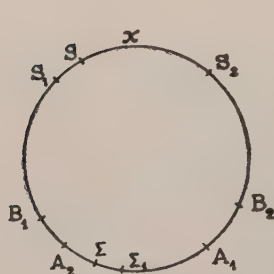


FIG. 25.

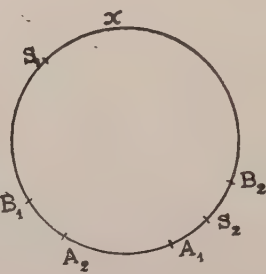


FIG. 26.

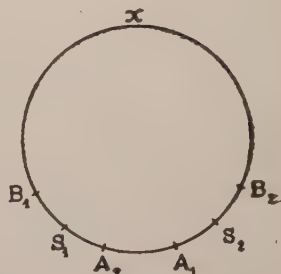


FIG. 27.

par ailleurs les autres hypothèses du théorème II ; il est élémentaire. On voit aisément qu'il en est de même de $\widehat{S_1 S_2}$ et de $\widehat{S_2 B_2 \Sigma}$. La courbe est composée de trois arcs élémentaires.

2^e CAS (fig. 26). — Les points S_1 et S_2 appartiennent tous deux à l'arc à trisécantes $\widehat{B_1 A_2 A_1 B_2}$.

Ces points ne pouvant être intérieurs à $\widehat{A_1 A_2}$ sont sur les arcs $\widehat{B_1 A_2}$ et $\widehat{A_1 B_2}$. Quand A décrit l'arc $\widehat{A_1 S_1}$, le point B suit le chemin $B_1 X B_2 X B_1 S_1$. L'arc $\widehat{A_1 S_1}$ est donc un arc élémentaire. Il en est de même de $\widehat{S_1 X S_2}$ et de l'arc $\widehat{S_2 A_1}$. La courbe est encore composée de trois arcs élémentaires.

3^e CAS (fig. 27). — Les points S_1 et S_2 sont l'un sur l'arc sans trisécante $\widehat{B_1 X B_2}$, l'autre sur l'arc à trisécante.

Supposons-les, par exemple, placés dans les positions qu'indique la figure 27. Faisons décrire au point A l'arc $\widehat{S_2 A_1 A_2}$. Le point B

s'éloigne en sens inverse de S_2 jusqu'en B_1 puis revient en arrière jusqu'en B_2 . Il n'y a aucune coexistence de deux points $[A, B]$ sur $\widehat{S_2 A_2}$ et cet arc est élémentaire. On voit aisément qu'il en est de même des arcs $\widehat{A_2 B_1 S_1}$ et $\widehat{S_1 B_2 S_2}$.

On peut donc énoncer :

La courbe gauche du quatrième ordre avec deux trisécantes de contact a deux plans stationnaires et se compose de trois arcs élémentaires (1).

Toute perspective de cette courbe est une courbe élémentaire.

III. — *Les trisécantes d'inflexion.*

46. — Supposons que la courbe Γ ait une inflexion, c'est-à-dire qu'une trisécante ordinaire mobile traverse une position Δ pour laquelle ses trois points d'intersection avec la courbe soient confondus en un point O . Tout plan qui passe par Δ rencontre la courbe Γ en un quatrième point. La perspective de Γ à partir de O est du troisième ordre puisqu'il existe dans le voisinage du point O des trisécantes (ordinaires ou de contact) et toute droite qui pivote dans le plan de projection autour de la trace δ de Δ rencontre cette cubique élémentaire en un seul point variable. Le point δ est donc point double ou rebroussement sur la cubique. C'est un rebroussement car Δ ne rencontre pas la courbe gauche ailleurs qu'au point O . Une trisécante suffisamment voisine de Δ a pour perspective une droite qui rencontre la cubique en trois points voisins du rebroussement. Ces 3 points ne peuvent appartenir à un même arc convexe de la cubique ayant pour origine le point de rebroussement δ . On peut donc trouver sur la courbe gauche Γ un arc dont le point O est un point intérieur et par tout point duquel, excepté O , passe une trisécante ordinaire ou de contact.

Un point M de cet arc étant pris pour point de vue, la perspective de Δ est une tangente d'inflexion ou de rebroussement à la cubique projection C_M . Mais cette courbe a un point double ou de rebroussement à la trace de la trisécante qui passe en M . La perspective de Δ est donc une tangente d'inflexion et c'est la seule tangente

(1) La courbe admet une infinité de plans doublement tangents (Voir démonstration du Théorème III, n° 32).

d'inflexion de C_M . La courbe Γ ne peut donc admettre d'autre trisécante d'inflexion que Δ .

Cela posé, la cubique C_O admet un point d'inflexion ; il existe donc un plan mené par O qui rencontre Γ en 3 points confondus en un point O' . Ce plan est osculateur en O' puisqu'il ne peut exister de trisécante d'inflexion passant par O' . Le plan osculateur en un point M' suffisamment voisin de O' rencontre Γ en un point M aussi voisin de O qu'on le voudra et par lequel passe une trisécante. La cubique C_M devrait admettre deux tangentes d'inflexion, l'une trace du plan $M\Delta$, l'autre trace du plan osculateur en O' . C'est impossible puisque cette cubique a un point double ou un rebroussement. L'existence d'une trisécante d'inflexion Δ conduit ainsi à une contradiction. Il en résulte que :

La courbe gauche du quatrième ordre ne présente pas d'inflexion.

CHAPITRE VI.

La courbe à point double ou à pointe.

I. — La courbe à point double.

47. — La perspective de la courbe à partir d'un de ses points choisi arbitrairement et distinct du point double O est une cubique élémentaire qui a un point double et un seul. La courbe Γ ne peut donc avoir un second point double ni une pointe. Elle n'a pas non plus de trisécante, excepté celles qui passent par O . Par tout point ordinaire B de Γ passe un plan osculateur et un seul qui touche Γ en un point A distinct de B . Les deux points A et B se confondent au point double O ; ils appartiennent alors chacun à l'un des deux arcs qui se croisent en O .

Le point double O détermine sur Γ deux pseudo-branches Φ et Ψ qui sont nécessairement toutes deux d'ordre pair ou impair.

48. — Supposons-les d'ordre pair et projetons Γ à partir d'un point B appartenant à la pseudo-branche Φ . La cubique élémentaire obtenue a une boucle ψ qui est la perspective de Ψ et une

pseudo-branche impaire perspective de Φ qui contient à la fois la projection b de B et le point d'inflexion a . Le plan osculateur unique mené de B à Γ touche cette courbe au point A situé comme B sur la pseudo-branche gauche Φ . Quand B vient au point double O sur l'un des deux arcs qui se coupent en ce point, A vient en O sur l'autre arc. Quand B décrit une fois Φ dans un sens donné à partir de O , A décrit la même pseudo-branche dans un sens déterminé. Comme au voisinage du point O les deux points se déplacent en sens inverse puisqu'ils s'écartent ensemble du point double, leurs mouvements sont de sens inverses et il y a un point de coïncidence autre que O . La courbe a ainsi deux points de surosculation S_1 et S_2 , un sur chaque pseudo-branche. Ces deux points déterminent sur Γ deux arcs dont chacun sans point double ni trisécante vérifie les hypothèses du théorème II. Ce sont deux arcs élémentaires :

La courbe du quatrième ordre à point double et à pseudo-branches paires a deux plans stationnaires et est constituée par la réunion de deux arcs élémentaires.

49. — Si les pseudo-branches sont impaires, un point de vue pris sur Γ se projette toujours sur la boucle de la cubique projection. Les points A et B sont chacun sur une pseudo-branche : ils ne se rencontrent qu'au point double et se déplacent dans le même sens sur la courbe Γ qui n'a aucun plan stationnaire. Une position A_1B_1 de ces points détermine sur Γ deux arcs qui sont élémentaires.

La courbe du quatrième ordre à point double et pseudo-branches impaires n'a aucun plan stationnaire. On la décompose d'une infinité de manières en un couple d'arcs élémentaires.

II. — *La courbe à pointe.*

50. — Il reste à étudier le cas où la courbe Γ a une pointe R . Cette pointe est unique puisque la perspective de Γ à partir d'un de ses points autre que R ne présente qu'un rebroussement.

Soit O un point quelconque de la courbe que nous prenons pour point de vue. Le plan défini par O et la tangente à Γ en R a pour trace sur le plan de projection la tangente de rebroussement de la cubique perspective de Γ . Ce plan ne rencontre donc pas Γ en dehors des points O et R et il ne contient pas la tangente en O à Γ . Un

plan tangent en R à Γ traverse donc en général cette courbe en un point O distinct de R . Lorsque O tend vers R sur la courbe nous admettons que le plan tangent tend vers une position limite, unique par hypothèse et qui constitue le plan osculateur en R .

Un plan π mené par les points O et R et qui ne contient pas la tangente à Γ en R a pour trace sur le plan de projection une droite qui passe au rebroussement r de la cubique et rencontre cette courbe en un point simple m . Le plan π traverse donc Γ aux points O et M et la perspective de la courbe gauche à partir du point R est du second ordre. La courbe Γ n'admet donc aucune trisécante. Puisque sa perspective n'a pas d'inflexion, il n'existe aucun plan osculateur à Γ qui touche cette courbe en dehors de R et contienne ce point. Si donc un plan osculateur en un point variable A qui rencontre la courbe en un autre point B se déplace de manière que soit le point A soit le point B tendent vers R , ce plan vient coïncider avec le plan osculateur unique en R .

Quand l'un des deux points A ou B se déplace dans un sens donné, l'autre point va dans un sens toujours le même puisque par tout point B de la courbe passe un seul plan osculateur dont le point d'osculution est distinct de B . Désignons, dans le voisinage du point R , par Φ et Ψ les deux arcs qui aboutissent en ce point. Lorsque A tend vers R le long d'un de ces arcs, le point B tend aussi vers R sur l'un d'eux. Je vais montrer que A et B ne peuvent appartenir tous deux au même arc, l'arc Φ par exemple :

Supposons-les sur cet arc. On peut choisir l'arc Φ commençant en R assez petit pour que tous ses points intérieurs soient ordinaires (n° 28). Si A occupe sur cet arc une position A_1 suffisamment voisine de R , le point B_1 qui lui correspond appartient aussi à Φ . Prenons un tel point A_1 pour point de vue. La cubique perspective de Γ est telle que la tangente en a_1 la rencontre encore au point b_1 . L'arc φ contient donc le point d'inflexion j qui est situé sur cet arc entre a_1 et b_1 . Ainsi il existe un plan osculateur mené par A_1 à Γ et qui touche l'arc Φ en J entre A_1 et B_1 .

Si le point de contact d'un plan osculateur variable est en J , son correspondant B est en A_1 . Si A vient en A_1 , son correspondant vient en B_1 , et l'on trouve sur l'arc Φ les successions de points données par la figure 28.

$R J A_1$ soit $R A B$

et

$R B_1 A_1$ soit $R B A$

ou celles données par la figure 29

$R A_1 J$ soit $R B A$

et

$R A_1 B_1$ soit $R A B$

Or, quand A tend vers R sur l'arc Φ , B tend aussi vers R en se déplaçant toujours dans le même sens. L'ordre des points R, A, B sur l'arc ne peut changer sinon les points A et B coïncideraient en

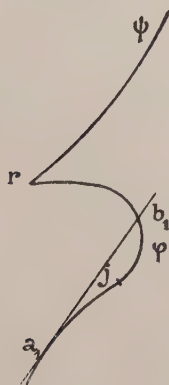


FIG. 28.

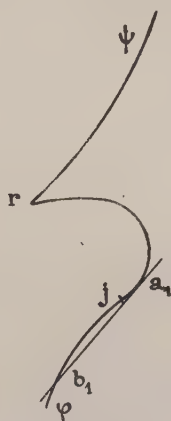


FIG. 29.

un autre point que R . Cette coïncidence est impossible puisque l'arc Φ n'admet aucun point de surosculation comme point intérieur. On aboutit ainsi à une contradiction.

En résumé, un plan osculateur dont le point de contact A appartient à un arc suffisamment petit et qui aboutit en R rencontre la courbe Γ en un point B situé sur le second arc Ψ qui aboutit aussi en R . Les points A et B tendent en même temps vers R l'un sur Φ , l'autre sur Ψ . Ils décrivent donc la courbe en sens inverse.

Quand A et B s'éloignent tous deux de R , ils décrivent en même temps la courbe tout entière une seule fois et ont un point de coïncidence dans ce mouvement. La courbe a un point de surosculation S et un seul.

Les deux points A et B ne peuvent coexister sur l'un quelconque des deux arcs joignant R et S, arcs qui n'admettent par ailleurs ni point double, ni pointe ni trisécante. D'après le théorème II, ces arcs sont élémentaires. Donc :

La courbe gauche du quatrième ordre à pointe possède un plan stationnaire. Elle est constituée par la réunion de deux arcs élémentaires.

51. — L'étude faite au cours des précédents chapitres montre que toute courbe gauche unibranche du quatrième ordre, à tangente et plan osculateur uniques et continus est constituée par un nombre fini d'arcs élémentaires et elle détermine ce nombre pour chaque type de courbe (1). Toute perspective de la courbe à partir d'un point de vue quelconque est une courbe élémentaire. Le tableau suivant résume les résultats :

Courbe	Plans stationnaires	Arcs élémentaires
Sans trisécante, pointe ni point double.....	4	4
A trisécantes ordinaires.....	0	3
A 4 trisécantes de contact.....	0	4
A 2 trisécantes de contact.....	2	3
A point double :		
pseudo-branches paires	2	2
pseudo-branches impaires	0	2
A pointe	1	2

JUEL a étudié les courbes à trisécantes dans le seul cas où elles sont tracées sur un hyperboloïde réglé ; il a donné pour les autres courbes le nombre des plans stationnaires en les supposant formées par la réunion d'un nombre fini d'arcs élémentaires. Depuis que nous avons obtenu nos résultats, M. SCHERK (2) a publié une étude

(1) Ces résultats précisent ceux donnés par M. O. HAUPT sur le nombre maximum de plans stationnaires et d'arcs élémentaires de la courbe : Ein Satz über die reelle Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung. *Math. Annalen*, vol. 108, 1933, p. 126-142.

(2) P. SCHERK, Ueber reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung. *Math. Annalen*, vol. 112, 1936, p. 743-766.

sur la courbe sans point double ni pointe où il établit le nombre des plans stationnaires suivant que la courbe a ou non des trisécantes. M. LINSMANN (1) a de son côté fait une classification des points du 4^e ordre et donné leur nombre. Le décompte des arcs élémentaires sur la courbe suivant le type auquel elle appartient est un résultat que nous croyons entièrement nouveau.

CHAPITRE VII.

La courbe à trisécantes ordinaires est tracée sur une quadrique réglée.

52. — Nous avons vu au chapitre IV que la courbe à trisécantes ordinaires n'a ni plan stationnaire ni plan bitangent. Il en résulte que cette courbe a l'index 2. Son index est en effet égal à 2 ou 0. S'il était nul, il existerait au moins un plan qui ne rencontrerait pas la courbe et celle-ci serait tout entière dans l'un des demi-espaces déterminés par le plan. En déplaçant ce dernier parallèlement à lui-même on l'amènerait à toucher la courbe en un point, puis en le faisant tourner autour de la tangente en ce point on obtiendrait un plan bitangent ou stationnaire, ce qui ne peut avoir lieu. La courbe à trisécantes ordinaires est une courbe d'index maximum.

Par chacun de ses points passe une trisécante qui rencontre la courbe en trois points distincts. Nous nous proposons d'étudier la surface lieu de ces trisécantes. Nous savons (n° 37) qu'on peut déplacer une trisécante arbitraire le long de la courbe de manière à engendrer la surface. La trisécante détermine sur la courbe trois arcs et quand on la déplace les trois points où elle rencontre la courbe décrivent chacun l'un de ces arcs. Un point fixe O étant pris sur une trisécante fixe $A_1A_2A_3$ le plan $O\Delta$ qui contient une trisécante mobile Δ rencontre la courbe en un point R .

Si ce point R reste immobile lorsque Δ se déplace, toute trisécante rencontre la droite OR ; dans ce cas — et il est le seul — la

(1) M. LINSMANN, Sur les arcs et les courbes réels gauches du quatrième ordre. *C. R. des séances de l'Acad. des Sc.*, vol. 204, 1937, p. 463.

surface lieu des trisécantes est une quadrique réglée. Notre méthode consistera à supposer la surface d'ordre supérieur à deux, ce qui implique un mouvement du point R lorsque Δ varie, et à étudier les mouvements de ce point compatibles avec les propriétés de la courbe. Nous aboutirons à une contradiction et montrerons ainsi que l'ordre est bien égal à deux, sans avoir supposé *a priori* cet ordre borné ni la surface élémentaire.

Au n° 53 nous établirons d'abord que le point R reste sur l'un des arcs tels que $\widehat{A_1 A_2}$ déterminés par la trisécante fixe ; nous obtiendrons cette propriété en étudiant la perspective de la courbe faite du point de vue O et en utilisant la classification des quartiques planes élémentaires donnée par JUEL.

A la faveur d'une propriété locale étudiée au n° 56, nous montrerons ensuite (n° 57) que l'on mène du point O à l'arc portant le point R un plan tangent et un seul qui contienne une trisécante et nous préciserons le mouvement du point R dans le voisinage du point de contact de ce plan. En généralisant à l'arc tout entier les résultats obtenus (n° 58), nous pourrions conclure que R ne peut se mouvoir et que la surface lieu des trisécantes est une quadrique réglée.

53. — Toute perspective de la courbe est une courbe élémentaire (n° 37). Le point de vue O étant choisi hors de la courbe et sur une trisécante $A_1 A_2 A_3$ la perspective sur un plan qui ne passe pas en O est une quartique élémentaire à point triple et sans tangente double. JUEL (1) a déterminé les types de quartiques qui peuvent présenter un point triple. Si nous reprenons la classification qu'il a donnée des quartiques planes nous trouvons quatre types :

- 1° les courbes sans point double ;
- 2° les courbes à points doubles et pseudo-branches impaires ;
- 3° les courbes à pseudo-branches paires et dont tous les points doubles sont de première espèce (2) ;
- 4° les courbes à pseudo-branches paires et dont tous les points doubles sont de 2^e espèce.

(1) C. JUEL, Mém. cité (voir p. 6, note 2), p. 148 et 157.

(2) Un point double O est dit de 1^{re} espèce lorsque par ce point on ne peut mener de tangente à la courbe dont le point de contact est distinct de O ; dans le cas contraire il est dit de 2^e espèce.

Les seules courbes pouvant présenter un point triple appartiennent au 2^e et au 4^e type. Celles du 2^e type seules n'admettent aucune tangente double, celles du 4^e ont toujours des tangentes doubles. La perspective de notre courbe gauche Γ du point de vue O est donc une quartique du 2^e type dont la forme générale est celle de la figure 30.

Les trois pseudo-branches axa , aya , aza sont les projections

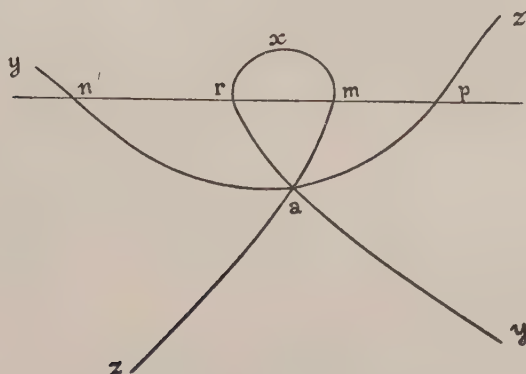


FIG. 30.

des trois arcs déterminés sur Γ par la trisécante $A_1A_2A_3$ qui porte le point de vue. Une trisécante quelconque MNP a pour perspective une droite qui rencontre chacun de ces arcs et a par suite deux points sur la boucle axa . L'un des deux points projetés en r et m est donc un point de rencontre apparent de la trisécante avec la courbe Γ pour un observateur dont l'œil est au point O . Ce point que nous désignons par R se projette donc sur la boucle de la quartique plane.

Ainsi le point R appartient constamment à un même arc de la courbe gauche. Nous allons déterminer cet arc.

54. — Supposons que la trisécante MNP soit fixe. Un plan π qui passe par cette droite rencontre en O la droite $A_1A_2A_3$ et en un point R la courbe Γ . Lorsque le plan tourne autour de MNP et décrit tout l'espace, le point R parcourt la courbe Γ tout entière. Il ne peut rétrograder dans ce mouvement car par un point de la courbe extérieur à MNP passe un seul plan qui contienne cette droite et lorsque R vient

en M, N ou P le plan contient la tangente à Γ en ce point et est également unique. Le point R se déplace donc toujours dans le même sens.

Appelons « correspondants » un arc de Γ et un segment de la droite $A_1A_2A_3$ qui joignent deux des points A_1, A_2, A_3 sans contenir le troisième. Je dis que le plan π mené par MNP rencontre la courbe et la trisécante $A_1A_2A_3$ en deux points qui appartiennent à un arc et à un segment correspondants : pour fixer les idées nous supposons que le plan π coupe la trisécante $A_1A_2A_3$ entre les points A_1A_2 supposés à distance finie et que le point A_3 est extérieur au segment fini A_1A_2 sur la droite. Quand le point O décrit ce segment, le point R va de A_1 en A_2 sur la courbe et ne passe pas au point A_3 puisque O n'y passe pas. Ainsi quand un point de vue O est pris sur le segment A_1A_2 de la trisécante $A_1A_2A_3$ c'est l'arc correspondant $\widehat{A_1A_2}$ de la courbe Γ qui se projette suivant la boucle de la quartique plane et cet arc porte le point de rencontre apparent de la courbe avec une trisécante quelconque.

Notons en passant que le plan MNPO sépare les points A_1 et A_2 et rencontre néanmoins en deux points l'arc $\widehat{A_1A_2}$. Si cet arc était borné, le plan le traverserait en un nombre impair de points. L'arc $\widehat{A_1A_2}$ va donc à l'infini et il en est de même de chacun des arcs $\widehat{A_2A_3}$ et $\widehat{A_3A_1}$.

55. — Dans ce qui suit, nous supposons les points A_1, A_2 et A_3 à distance finie et le point de vue O intérieur au segment fini A_1A_2 qui ne contient pas A_3 . Nous désignons par la notation (M) une trisécante qui rencontre en un point M l'arc $\widehat{A_1A_2}$. Le point R où le plan (M) O rencontre la courbe Γ est sur l'arc $\widehat{A_1A_2}$ et nous allons étudier son mouvement quand le point M se déplace sur l'arc.

Montrons d'abord que le point R ne peut se confondre avec aucun des points A_1 et A_2 . Lorsque la trisécante (M) est distincte de $A_1A_2A_3$ ce résultat est évident sinon les deux trisécantes seraient coplanaires. Considérons une position de M voisine de A_1 . Les droites A_1M, A_2N, A_3P déterminent un hyperboloïde et le rayon OR rencontre deux génératrices $A_1A_2A_3$ et MNP de cette quadrique. Par le point O passe une deuxième génératrice qui rencontre MNP en Q. Le rayon OR est dans le plan tangent en Q à la surface. Faisons tendre M vers A_1 ; la quadrique tend vers l'hyperboloïde défini

par les tangentes t_1, t_2, t_3 à la courbe Γ aux points A_1, A_2 et A_3 ; le rayon OR appartient à la limite au plan tangent à cette surface au point O . Le point R tend ainsi sur l'arc $\widehat{A_1 A_2}$ vers une position limite distincte de A_1 et A_2 et définie par l'égalité des rapports anharmoniques :

$$\mathcal{R}(t_1, t_2, t_3, OR) = \mathcal{R}(A_1, A_2, A_3, O).$$

Le point R ne peut venir en A_1 ou A_2 puisque le point de vue est distinct de ces points. Quand M décrit l'arc $\widehat{A_1 A_2}$ en entier, le point R se déplace sur cet arc et revient à son point de départ. Il appartient constamment à un arc $\alpha_1 \alpha_2$ intérieur à $\widehat{A_1 A_2}$ et passe au moins deux fois par tout point de cet arc.

Les points M et R ont donc au moins une coïncidence quand M décrit l'arc $\widehat{A_1 A_2}$ et la trisécante (M) est alors contenue dans le plan tangent en M à la courbe Γ mené par le point O . Nous allons montrer que ce plan est unique. Établissons d'abord un théorème important en lui-même.

56. — Soit (M_0) la trisécante qui passe par un point M_0 intérieur à l'arc $\widehat{A_1 A_2}$; sur la tangente $M_0 T$ en ce point prenons un point de vue ω distinct de M_0 . Le plan défini par ce point ω et par une trisé-

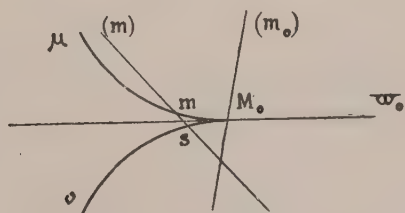


FIG. 31.

cante (M) voisine de (M_0) rencontre la courbe en dehors de (M) en un point S . Je dis que les points M et S sont de part et d'autre de M_0 sur la courbe.

Projetons la courbe sur son plan normal en M_0 à partir du point de vue ω . Un arc suffisamment petit et qui comprend le point M_0 comme point intérieur se projette suivant deux arcs convexes $\widehat{M_0 \mu}$ et $\widehat{M_0 \nu}$ raccordés en M_0 par un rebroussement. La tangente de

rebroussement est la trace ω_0 sur le plan de projection du plan osculateur à Γ en M_0 . La trisécante (M_0) se projette suivant une droite (m_0) qui n'a d'autre point que M_0 sur les arcs $\widehat{M_0\mu}$ et $\widehat{M_0\nu}$ et est distincte de la tangente de rebroussement ω_0 .

La projection de la trisécante (M) rencontre en m , perspective de M l'un des arcs soit $\widehat{M_0\mu}$. Lorsque (M) tend vers (M_0) le point S tend vers M_0 sur la courbe Γ et la droite (m) rencontre l'arc $\widehat{\mu M_0\nu}$ en un second point s qui tend vers M_0 en même temps que M . Ces points sont de part et d'autre du point M_0 sur l'arc $\widehat{\mu M_0\nu}$ car la position limite (m_0) de la droite (m) est distincte de la tangente de rebroussement (1). Il s'ensuit que les points M et S sur la courbe gauche sont de part et d'autre du point M_0 .

Si nous supposons maintenant que le plan mené par (M_0) et un point O quelconque de l'espace est tangent en M_0 à la courbe Γ , le plan $O(M)$ rencontre la courbe au voisinage de M_0 en deux points M et R qui sont de part et d'autre de M_0 . Ce plan a en effet un point ω sur la tangente M_0T à la courbe et nous venons de voir que les points M et R intersections de la courbe et du plan $\omega(M)$ sont de part et d'autre de M_0 sur un petit arc admettant M_0 comme point intérieur. Ainsi :

THÉORÈME : *Lorsqu'on mène d'un point O extérieur à la courbe gauche un plan tangent en M_0 à cette courbe et qui contient une trisécante, le plan défini par une trisécante suffisamment voisine et le point O rencontre la courbe en deux points voisins de M_0 et situés de part et d'autre sur la courbe.*

57. — De ce théorème, nous déduirons que par un point de vue O situé sur le segment A_1A_2 d'une trisécante fixe on mène à l'arc correspondant $\widehat{A_1A_2}$ un seul plan tangent qui contienne une trisécante :

Une trisécante variable (M) et la tangente à la courbe en M définissent un plan qui rencontre la trisécante fixe en un point ω dont la position varie continuellement quand le point M décrit l'arc $\widehat{A_1A_2}$.

(1) La droite (m_0) est une *sécante limite* au sens de J. HJELMSLEV, Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle. *Bull. de l'Acad. des Sc. et des Let. de Dan.*, 1911, p. 485.

Le point ω ne peut atteindre A_1 ou A_2 que lorsque M coïncide avec lui. Il ne peut venir en A_3 puisque M n'atteint pas ce point. Il décrit donc le segment A_1A_2 . Déplaçons M de A_1 vers A_2 sur l'arc et supposons que pour une position M' de M le point ω rétrograde en ω' sur le segment. On trouverait de part et d'autre de la trisécante (M') deux trisécantes voisines (M_1) et (M_2) telles que les plans tangents qui les contiennent rencontrent le segment A_1A_2 en un point ω'' voisin de ω' . La trisécante (M') et le point ω'' définissent un plan qui rencontre la courbe en un point R voisin de M' . Un petit arc de la courbe Γ au voisinage de M' et des deux côtés contient les points R, M', M_1 et M_2 . Les points M' et R tendent en même temps sur cet arc soit vers M_1 soit vers M_2 . D'après le théorème du n° 56 les points M' et R sont séparés sur l'arc par chacun des points M_1 et M_2 . Or c'est impossible puisque M' sépare M_1 et M_2 .

Ainsi quand le point M décrit l'arc $\widehat{A_1A_2}$, le plan tangent en M qui contient la trisécante (M) rencontre le segment A_1A_2 en un point ω qui se déplace toujours dans le même sens. Il s'ensuit que par un point O intérieur à ce segment, on mène à l'arc $\widehat{A_1A_2}$ un seul plan tangent qui contienne une trisécante. Nous l'appellerons le *plan tangent à trisécante* relatif au point O et nous désignerons par M_O son point de contact.

58. — Le théorème du n° 56 précise la position du point R correspondant à une trisécante (M) suffisamment voisine de la trisécante (M_O) . Nous allons l'étendre à une trisécante quelconque et établir les résultats suivants :

THÉORÈME : *Un couple $[M, R]$ est tel que :*

- 1° *Les points M et R sont séparés par le point M_O ;*
- 2° *Si l'on fait tendre l'un des points M ou R vers M_O sur la courbe gauche, l'autre point tend aussi vers M_O .*

DÉMONSTRATION.

1° Un point N étant pris arbitrairement sur l'arc $\widehat{A_1A_2}$ appelons *antérieur* tout point intérieur à l'arc $\widehat{A_1N}$ et *postérieur* tout point intérieur à l'arc $\widehat{NA_2}$.

Supposons que le plan mené par O et une trisécante rencontre l'arc $\widehat{A_1A_2}$ en deux points M et S antérieurs à M_O . D'après le théo-

rème du n° 56 lorsque le point M vient en M_1 suffisamment voisin de M_0 et antérieur, le point S est postérieur à M_0 . Les déplacements de M et S étant liés continuellement sur l'arc gauche, il y aurait une position M_2 de M antérieure à M_1 pour laquelle le point S coïnciderait avec M_0 . Un plan $(M)O$ suffisamment voisin rencontrerait l'arc en trois points :

- un point voisin de M_2 (donc antérieur à M_1) ;
- un point voisin de M_0 et antérieur (donc postérieur à M_1) ;
- un point voisin de M_0 et postérieur.

Ces points étant distincts, le plan $(M)O$ rencontrerait la courbe Γ en 5 points, ce qui est impossible.

La première partie du théorème est établie.

2° Il s'agit de montrer que les points M et R tendent en même temps vers M_0 . Si nous faisons tendre le point M vers M_0 , le plan $(M)O$ a pour limite le plan tangent $(M_0)O$ et par suite R vient se confondre en M_0 avec M .

Supposons que R tende vers M_0 et montrons que son correspondant M (ou l'un de ses correspondants s'il y en a plusieurs) ne peut tendre vers un point N distinct de M_0 sur l'arc $\widehat{A_1 A_2}$. Admettons que lorsque R tend vers M_0 un de ses correspondants M tende vers un point N de la courbe distinct de M_0 . On peut former sur l'arc postérieur à M_0 une suite de points $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$ qui admet M_0 pour point limite et dont tous les points sont successivement franchis par R dans son mouvement vers M_0 . Il lui correspond sur l'arc antérieur une suite $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$ dont la limite est N . Le plan $(M_k)O$ rencontre en ω_k la tangente M_0T . Nous prendrons ce point pour point de vue et ferons une perspective de l'arc $\widehat{A_1 A_2}$ sur le plan qui contient la droite M_0N et la trisécante (M_0) . L'arc se projette suivant un arc Σ_k de cubique plane qui passe au point N , a un rebroussement en M_0 et admet comme tangente de rebroussement la trace du plan osculateur à Γ en M_0 sur le plan de projection. Ces résultats sont valables quel que soit le point ω_k choisi comme point de vue sur M_0T . Le plan qui projette M_kR_k rencontre l'arc Σ_k aux points m voisin de N et r_k voisin de M_0 et postérieur. Pour tous les arcs $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k, \dots$ obtenus des points de vue $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots$, la droite M_0N est une sécante limite. Une droite voisine m_kr_k rencontre donc l'arc Σ_k en deux points voisins de M_0 , l'un postérieur

(c'est le point r_k), l'autre antérieur r'_k et on peut choisir l'indice k assez grand pour que la distance $M_{Or'_k}$ soit aussi petite qu'on le veut. Le point r'_k est donc à partir d'un certain rang distinct de m_k et le plan $(M_k)O$ rencontre l'arc gauche $\widehat{A_1A_2}$ en 3 points, ce qui est impossible et achève la démonstration.

59. — Il est maintenant aisé d'étudier les conditions auxquelles sera soumis le mouvement du point R sur l'arc $\widehat{A_1A_2}$ quand le point M décrit cet arc.

Quand la trisécante (M) est confondue avec la droite $A_1A_2A_3$ nous avons vu (n° 55) que le point R est au point O_1 distinct des extrémités de l'arc. Ce résultat est valable, que le point M soit supposé en A_1 ou en A_2 . Le point M_0 devrait donc d'après le théorème du n° 58 séparer les points A_1 et O_1 et les points A_2 et O_1 . Le point O_1 coïncide donc avec M_0 .

Supposons M en A_1 et faisons lui décrire l'arc $\widehat{A_1A_2}$. Son correspondant R part de M_0 . Supposons que lorsque M atteint un point M_1 antérieur à M_0 le point R atteigne un point R_1 postérieur à M_0 . Il a franchi tous les points de l'arc postérieurs à M_0 et antérieurs à R_1 et on peut choisir (théorème du n° 58) un de ces points suffisamment voisin de M_0 pour que tous les points M qui lui correspondent appartiennent à un arc de longueur arbitraire δ aussi petite qu'on le veut et antérieur à M_0 . On peut en particulier choisir cet arc pour que tous ses points soient postérieurs à M_1 . En allant de A_1 en M_1 le point M n'a pu atteindre cet arc et le point R n'a donc pu quitter le point M_0 .

Ainsi quand M va de A_1 en M_0 , le point R reste en M_0 . Si M franchit M_0 le point R ne peut se déplacer que sur l'arc M_0A_1 et atteint un point α_1 pour revenir en M_0 quand M atteint le point A_2 . Si on déplace au contraire M de A_2 vers A_1 on voit de même que le point R reste d'abord immobile en M_0 tant que M n'a pas franchi ce point, puis parcourt un arc $M_0\alpha_2$ intérieur à M_0A_2 . A une trisécante quelconque distincte de (M_0) correspondraient donc 2 points R , l'un en M_0 , l'autre sur l'un des arcs $M_0\alpha_1$ ou $M_0\alpha_2$.

Nous sommes ainsi conduits à rejeter l'hypothèse d'un mouvement du point R et à conclure que ce point reste fixe en M_0 quelle que soit la position de la trisécante (M) .

Tout plan $(M)O$ contient donc le point M^0 et par suite la droite

OM_0 . Lorsque M parcourt l'arc $\widehat{A_1 A_2}$ le point où (M) rencontre la droite OM_0 parcourt cette droite tout entière. Sinon ce point rétrograderait en un point de la droite et on trouverait dans son voisinage des trisécantes concourantes. On peut donc affirmer qu'un plan quelconque contenant M_0O contient une trisécante et coupe la surface lieu des trisécantes suivant deux droites.

Ces résultats sont valables quel que soit le point pris sur une trisécante fixe en dehors de la courbe. Tout plan qui contient une trisécante coupe la surface suivant deux droites.

Supposons qu'une droite arbitraire D ait un point Q sur cette surface. La trisécante (Q) qui passe en ce point détermine avec D un plan qui coupe la surface suivant deux droites. Elles rencontrent D aux points Q et Q' et ce sont les seuls points de D sur la surface qui est ainsi du 2^e ordre. Puisqu'elle est réglée, c'est un hyperboloïde à une nappe et notre démonstration est achevée.

60. — JUEL a étudié la courbe du quatrième ordre à trisécantes ordinaires tracée sur un hyperboloïde (1), en vue d'obtenir certaines propriétés qu'il n'avait pu établir pour la courbe générale du 4^e ordre à trisécantes. Notre démonstration prouve que ces propriétés sont valables pour la courbe générale. C'est ainsi que par un point passent 2 ou 3 bisécantes à la courbe ; celle-ci est de 4^e classe et son rang est égal à 6.

La courbe à trisécantes du 4^e degré s'obtient comme intersection d'un hyperboloïde avec une surface du 3^e degré dont 2 droites coïncident avec deux génératrices de la quadrique. Il serait intéressant de rechercher si la courbe du 4^e ordre à trisécantes peut de même être tracée sur la surface du 3^e ordre de JUEL qui possède 3, 7, 15 ou 27 droites réelles. C'est ce que nous avons l'intention d'étudier dans un travail ultérieur (2).

(1) C. JUEL, Mém. cité (p. 7, note 1), p. 332.

(2) On pourrait se demander s'il existe un type de courbe gauche du quatrième ordre qui admette pour support une quadrique non réglée. Nous pensons que la réponse à cette question est négative, car si toute surface réglée du second ordre est algébrique, il existe par contre des surfaces du second ordre non réglées qui ne sont pas des quadriques.

NOTE SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE

Exemple de cubique gauche tracée sur deux cônes du second ordre.

61. — Nous avons donné au n° 19 (première partie, chapitre V) un exemple d'une courbe du troisième ordre tracée sur un cône du second degré. Nous nous proposons dans cette note d'obtenir un exemple qui appartienne à une catégorie plus générale de cubiques gauches : cubiques faisant partie de l'intersection de deux cônes supposés convexes et qui peuvent donc ne pas être algébriques, ni même analytiques. La difficulté de construire de tels cônes provient de la propriété bien connue des ovals de se couper en un nombre pair quelconque de points. De sorte que si l'on choisit deux cônes dont les traces sur un certain plan sont deux ovals ayant au plus 4 points communs, rien ne prouve qu'il en sera de même pour une autre section plane.

Nous étudierons dans une première partie quelques propriétés des ovals d'ordre cyclique $2n$ au sens de M. MARCHAUD et nous rechercherons en particulier le nombre des normales qu'on peut leur mener d'un point du plan. Nous déduirons de là l'existence d'un oval qui rencontre en deux points au plus tout oval obtenu en le faisant tourner autour d'un de ses points. Nous montrerons dans la troisième partie que les cônes cherchés ont pour base dans un plan perpendiculaire à la génératrice commune deux tels ovals superposables par une rotation autour de cette génératrice commune.

I. — *Quelques propriétés des ovals d'ordre cyclique $2n$.*

62. — Les ovals d'ordre cyclique $2n$ sont des courbes du second ordre, à tangente partout, qu'un cercle quelconque de leur plan

rencontre en $2n$ points au plus. Nous pouvons sans inconvénient les supposer tout entiers à distance finie. Nous allons démontrer pour ces ovales une propriété analogue à celle qu'a établie M. MARCHAUD pour les courbes d'ordre linéaire borné :

THÉORÈME : *Lorsqu'un ovale d'ordre cyclique $2n$ est rencontré par un cercle en $2n$ points distincts, les deux courbes se traversent en chacun de ces points.*

Soit Γ l'ovale et C un cercle qui le rencontre aux points $P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ tous distincts par hypothèse. Supposons qu'au point P_k le cercle ne traverse pas l'ovale. On peut alors trouver sur Γ deux petits arcs $(\alpha), (\beta)$ aboutissant au point P_k et qui sont tous deux dans l'une des deux régions du plan limitées par C . On peut même choisir ces arcs

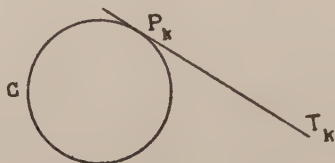


FIG. 32.

suffisamment petits pour qu'ils n'aient avec la tangente T_k au cercle C en P_k d'autre point commun que le point P_k . La droite T_k est alors tangente en P_k à l'ovale. Les deux arcs $(\alpha), (\beta)$ sont par rapport à la tangente T_k du même côté que les points P_j ($j \neq k$).

Cela posé, imaginons le théorème en défaut pour $p + q$ des $2n$ points communs à l'ovale et au cercle. En chacun de ces points aboutissent deux petits arcs tels que $(\alpha), (\beta)$ et ces arcs sont pour p des points intérieurs au cercle et pour q des points extérieurs. Un cercle concentrique à C de rayon suffisamment voisin et inférieur [supérieur] rencontrera l'ovale en $2n + p - q$ points [$2n - p + q$ points] et si $p \neq q$, il existe un cercle qui a plus de $2n$ points sur l'ovale.

Si $p = q$, un cercle homothétique de C avec un des points P_k comme centre d'homothétie aurait plus de $2n$ points sur l'ovale.

La démonstration précédente montre qu'aux points où un ovale et un cercle se rencontrent sans se traverser, les deux courbes ont même tangente. Ainsi :

COROLLAIRE : *Lorsqu'un ovale et un cercle ont p points communs où ils ne se traversent pas, ces points sont les pieds de p normales à l'ovale qui concourent au centre du cercle.*

63. — Nous dirons qu'un ovale est d'ordre cyclique $2n$ pour un point P si tout cercle de centre P le rencontre en $2n$ points au plus et s'il existe au moins un tel cercle qui a $2n$ points communs avec lui. Nous démontrerons pour ces courbes la propriété suivante :

THÉORÈME : *Un ovale d'ordre cyclique $2n$ pour un point P a au moins $2n$ normales distinctes qui concourent en P .*

Deux normales sont considérées comme distinctes lorsque leurs pieds sont distincts sur l'ovale. Nous ferons la démonstration en deux temps :

a) Un arc convexe rencontré en 2 points par un cercle de centre P admet au moins une normale issue de ce point.

Nous pouvons supposer que l'arc $\widehat{AB}$ et le cercle se traversent en chacun de leurs points de rencontre. Sinon le cercle serait tangent à l'arc en un point Q et la droite PQ serait d'après le corollaire du n° 62, normale à l'arc convexe. Soit donc l'arc $\widehat{AB}$ qu'un cercle de centre P traverse aux deux points M et N .

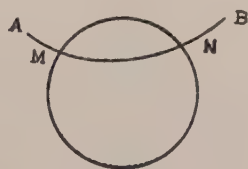


FIG. 33.

Les extrémités A et B de l'arc sont toutes deux d'un même côté de la circonférence, à l'extérieur par exemple. Il existe sur l'arc $\widehat{AB}$ un arc $\widehat{MN}$ dont aucun point n'est extérieur à la circonférence. Un cercle concentrique au premier et de rayon plus petit quoique suffisamment voisin rencontre cet arc $\widehat{MN}$ en au moins deux points M' et N' qui s'éloignent respectivement de M et N sur l'arc quand le rayon du cercle décroît. Ces points vont à la rencontre l'un de l'autre. Si les cercles successifs de rayons décroissants rencontrent

l'arc en deux points au plus, ils se réunissent et la sécante $M'N'$ à l'arc $\widehat{AB}$ tend vers une tangente à l'ovale. Son point de contact est le pied d'une normale issue de P . S'il existe un cercle qui rencontre l'arc en plus de deux points, l'apparition des nouveaux points a lieu au pied d'une normale. Dans tous les cas, on mène du point P au moins une normale à l'arc $\widehat{AB}$. Ce résultat est encore évidemment valable quand P est sur l'arc ; le pied d'une normale est alors en P .

b) Soit maintenant un ovale d'ordre cyclique $2n$, pour un point P . On peut trouver au moins un cercle C de centre P qui le rencontre en $2n$ points distincts qui sont les extrémités de $2n$ arcs convexes appartenant à l'ovale : $(\alpha_1), (\beta_1), (\alpha_2), (\beta_2), \dots, (\alpha_n), (\beta_n)$. L'ovale et le cercle se traversent en chacun de leurs points communs, d'après le théorème du n° 62. Les arcs $(\alpha_i), (\beta_i)$ sont donc alternativement de part et d'autre du cercle. Supposons, pour fixer les idées, tous les arcs (α_i) intérieurs et tous les arcs (β_i) extérieurs au cercle. Un cercle concentrique à C , de rayon inférieur [supérieur] suffisamment voisin rencontre chaque arc (α_i) [chaque arc (β_i)] en deux points au moins distincts des extrémités de cet arc. Du point P on mène au moins une normale à chacun des arcs (α_i) et (β_i) , donc au moins $2n$ normales distinctes à l'ovale, ce qui démontre le théorème.

64. — Réciproquement, soit un ovale dont n normales et n seulement concourent en un point P . Décrivons l'ovale dans un sens arbitraire à partir du pied A_1 d'une de ces normales ; nous rencontrons les pieds des autres normales dans l'ordre $A_2, \dots, A_n$. Soit $2n'$ l'ordre cyclique de l'ovale pour le point P . On ne peut avoir $2n' > n$ sinon il existerait au moins un cercle de centre P qui traverserait l'ovale en $2n'$ points et du point P on mènerait au moins $2n'$ normales distinctes à cet ovale. On a donc $2n' \leq n$. Ainsi :

Quand n normales à un ovale concourent en un point, l'ordre cyclique de l'ovale pour ce point est au plus égal à n (1).

65. — CAS PARTICULIERS : Supposons que 2 normales concourent en P . L'ordre cyclique de l'ovale pour ce point ne peut être nul ; il est donc égal à 2.

(1) Quand n est impair, l'ordre cyclique est bien entendu au plus égal à $n - 1$.

Réciproquement, si l'ovale est d'ordre cyclique 2 pour le point P, il a exactement 2 normales qui concourent en P. En effet :

Un cercle de rayon assez petit de centre P ne coupe pas l'ovale. Quand le rayon croît, ce cercle devient dans le cas général tangent à l'ovale au pied d'une des deux normales. Le rayon continuant à croître le cercle coupe l'ovale en deux points distincts, puis est tangent au pied de la deuxième normale et ensuite ne coupe plus l'ovale. Il ne peut donc exister plus de deux normales passant par P.

La démonstration reste valable dans le cas particulier où un cercle de centre P serait osculateur à l'ovale. Ainsi :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'on mène d'un point P exactement 2 normales à un ovale est que cet ovale soit d'ordre cyclique 2 pour le point P.

Si 4 normales concourent en P, l'ordre cyclique pour ce point ne pouvant être égal à 2 d'après ce qui précède, est égal à 4. Ainsi une condition *suffisante* pour que tout cercle de centre P rencontre un ovale en 4 points au plus est que 4 normales concourent en P.

II. — *Construction des ovales bases de deux cônes qui ont en commun une cubique gauche.*

66. — Soit C_0 un ovale d'ordre cyclique 2 pour un de ses points O. Il existe une normale et une seule à cet ovale qui passe par O et dont le pied N soit distinct de O. Le rayon qui joint O à un point quelconque M de l'ovale a une longueur croissante lorsque M décrit l'un des arcs $\widehat{ON}$, passe par un maximum égal à ON puis décroît quand M revient vers O le long de l'arc $\widehat{NO}$.



FIG. 34.

On voit alors aisément qu'une rotation *suffisamment petite* autour de O transforme l'ovale C_0 en un ovale C qui rencontre C_0 en un seul point distinct de O . Nous allons montrer que cette propriété se conserve pour une rotation *quelconque* autour de O .

Le nombre des points de rencontre de C_0 et C ne peut changer lorsque C tourne autour de O que si, pour une certaine rotation ω , l'ovale C est tangent à C_0 . Supposons donc les courbes C et C_0 tangentes en un point A . Une rotation ($-\omega$) autour de O donnée à l'ovale C l'amène en coïncidence avec C_0 . Les tangentes à C_0 aux points A et A_0 font le même angle V avec les rayons OA et OA_0 .

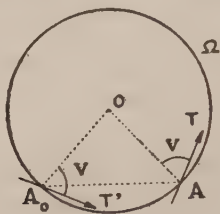


FIG. 35.

Si $V = \frac{\pi}{2}$, la circonférence Ω de centre O et de rayon OA est bitangente à C_0 aux points A et A_0 et on peut trouver une circonférence concentrique qui rencontre C_0 en 4 points au moins voisins deux à deux des points A et A_0 .

Supposons $V \neq \frac{\pi}{2}$. La corde AA_0 détermine deux arcs sur C_0 . Soit $\widehat{AA_0}$ celui de ces arcs qui ne contient pas le point O . Les deux demitangentes AT et A_0T' orientées dans le sens de la rotation ω autour de O rencontrent toutes deux la circonférence Ω (ou ne la rencontrent pas). Un mobile qui décrit l'arc $\widehat{AA_0}$ est au voisinage du point A extérieur (ou intérieur) à Ω , et au voisinage du point A_0 intérieur (ou extérieur) à Ω . Ce mobile rencontre donc au moins une fois la circonférence Ω . Les courbes C_0 et Ω ont donc 3 points communs et par suite au moins 4 points communs.

Ainsi, si les ovales C et C_0 sont tangents en un point distinct de O , on peut trouver une circonférence de centre O qui rencontre C_0 en 4 points au moins. Ce résultat est en contradiction avec notre hypothèse d'un ovale d'ordre cyclique 2 pour le point O .

Le nombre des points communs à C et C_0 est donc égal à 2, quelle que soit la valeur de la rotation ω autour de O .

Nous appellerons *ovale cosécant* un tel ovale C_0 dont on ne peut déduire par une rotation autour d'un de ses points O un autre ovale C qui lui soit tangent.

67. — Il est facile de donner un exemple d'un tel ovale : soit la région convexe limitée par une demi-circonférence et le diamètre OA qui la sous-tend. Un arc du second ordre tracé dans ce domaine du point O au point A , rencontre au plus en un point toute circonférence de centre O . Supposons en effet qu'une circonférence PQ de rayon OP rencontre l'arc en 2 points M et N . La corde MN de cette circonférence rencontre le diamètre OA en un point R du segment AQ . Or l'arc du second ordre $\widehat{OMNA}$ et sa corde OA délimitent une région convexe dont la droite MN ne peut rencontrer la frontière en plus de deux points. Il y a contradiction et toute circonférence de centre O rencontre l'arc du 2^e ordre en un point au plus.

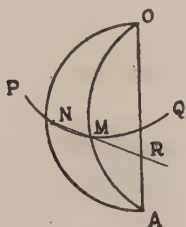


FIG. 36

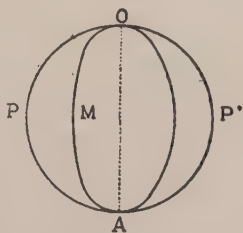


FIG. 37

Cet arc $\widehat{OMA}$ peut d'ailleurs être mené tangent en O et en A à la demi-circonférence. On peut dans ce cas le prolonger par un autre arc convexe tracé à l'intérieur du demi-cercle $OP'A$ symétrique du premier par rapport à OA . On obtient ainsi un ovale que toute circonférence de centre O rencontre au plus en 2 points et qui est par suite cosécant.

Remarquons en passant qu'aucune partie de cet ovale ne peut être constituée par un arc de cercle centré au point O .

III. — *La courbe commune à deux cônes dont les bases sont deux ovales cosécants.*

68. — Soient deux cônes du second ordre, de sommets S et S' qui ont une génératrice commune et dont les bases dans un plan π

sont les ovales Γ et Γ' . Un plan quelconque π_1 les coupe suivant deux ovales C_1 et C'_1 . Projetons ces ovales sur le plan π à partir du point de vue S' : l'ovale C'_1 se projette suivant Γ' ; l'ovale C_1 suivant l'ovale Ω homologue de Γ dans une homologie dont le pôle est le pied O de la génératrice commune et l'axe la trace du plan π_1 sur le plan π .

Dans le cas particulier où le plan π_1 est un plan sécant pour les deux cônes et passe par SS' , l'ovale Ω est constitué par une droite issue de O dans le plan π et la tangente à l'ovale Γ' au point O . Si le plan π_1 passe par S , l'ovale Ω est constitué par deux droites issues du point O lorsque π_1 coupe le cône (S) , par une droite issue de O comptée deux fois si le plan est tangent au cône (S) , par la tangente en O à Γ comptée deux fois si le plan est tangent au cône suivant SO . Pour un plan π_1 passant par S' , l'ovale est formé d'une droite qui ne passe pas par le point O et de la tangente en O à Γ' lorsque le plan coupe le cône (S') , d'une droite tangente à Γ' et de la tangente en O à Γ' si le plan est tangent au cône, de la tangente en O à Γ' comptée deux fois si le plan est tangent au cône suivant $S'O$.

Avec ces conventions, la famille des ovales Ω dans le plan π est un ensemble continu d'ovales qui dépend de 3 paramètres comme les plans π_1 .

La courbe commune aux deux cônes est du troisième ordre si les ovales C_1 et C'_1 se rencontrent en 4 points au plus quel que soit leur plan π_1 , c'est-à-dire si l'ovale Γ' rencontre en 4 points au plus tout ovale Ω .

69. — Supposons maintenant l'ovale Γ cosécant pour toute rotation autour d'un de ses points O . S et S' sont deux points quelconques sur la perpendiculaire élevée en O au plan π . Les cônes qui ont pour directrice commune Γ et pour sommets S et S' sont tangents le long de la génératrice commune $SS'O$. L'ovale Γ est tangent en O à l'ovale Ω qui lui correspond dans une homologie arbitraire de centre O , et il rencontre en deux autres points au plus cet ovale, sur l'axe de l'homologie.

Soit Ω_1 l'un des ovales de la famille Ω . Une rotation φ_1 de l'ovale Γ autour de SS' l'amène en Γ_1 et les courbes Γ_1 et Ω_1 ont au plus 4 points communs si l'angle φ_1 est suffisamment petit. A chaque

courbe Ω_k homologique de Γ on peut ainsi attacher une rotation φ_k autour de SS' . L'ensemble de ces rotations admet une borne inférieure φ' qui n'est pas nulle. S'il en était autrement, on pourrait extraire de l'ensemble une suite $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ telle que φ_n tende vers zéro. Il lui correspondrait une suite d'ovales $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ qui tendrait vers une limite Ω_N pour laquelle il y a un angle φ_N non nul. On pourrait alors choisir un nombre positif η assez petit pour que l'inégalité

$$|n - N| < \eta$$

entraîne

$$|\varphi_n - \varphi_N| < \frac{\varphi_N}{2}$$

et par suite

$$\varphi_n > \varphi_N \quad \text{ou} \quad \varphi_N > \varphi_n > \frac{\varphi}{2}$$

résultats qui contredisent l'hypothèse.

Soit donc φ' la borne inférieure non nulle de l'ensemble des rotations φ . La rotation φ' donnée à l'ovale Γ autour de SS' l'amène en Γ' et l'ovale Γ' a au plus 4 points communs avec tout ovale Ω_k et deux points avec Γ . Les deux cônes de bases Γ et Γ' et de sommets S et S' se coupent suivant une courbe du troisième ordre qui est indécomposée puisque ces cônes n'ont qu'une génératrice commune.

70. — Nous avons ainsi obtenu une courbe gauche du troisième ordre comme partie d'intersection de deux cônes convexes.

Les exemples donnés au chapitre V de la première partie (cubiques tracées sur des surfaces algébriques) faisaient intervenir uniquement des propriétés projectives. La méthode que nous venons d'employer fait au contraire appel à des propriétés métriques. Il nous a néanmoins paru intéressant de la publier parce qu'elle donne des courbes d'un caractère plus général et aussi parce qu'à notre connaissance JUEL n'a pas construit de courbe gauche du troisième ordre qui ne soit située sur un hyperboloïde ou un cône du second degré.



TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	1
PREMIÈRE PARTIE. — <i>Les Courbes gauches du Troisième ordre.</i>	
Chapitre I : Définitions et hypothèses.....	5
II : Les sections planes de la développable.....	10
III : La famille des droites communes à deux plans oscu- lateurs	13
IV : Courbes du 3 ^e ordre sur un hyperboloïde ou un cône convexe.....	16
V : Exemples de cubiques gauches tracées sur des sur- faces algébriques.....	23
VI : Le prolongement d'un arc gauche du 3 ^e ordre.....	28
DEUXIÈME PARTIE. — <i>Les Courbes gauches du Quatrième ordre.</i>	
Chapitre I : Définitions et hypothèses.....	34
II : Méthodes et Théorèmes généraux.....	40
III : La courbe sans trisécante, point double ni pointe..	48
IV : La courbe à trisécantes ordinaires.....	49
V : La courbe à trisécantes de contact.....	52
VI : La courbe à point double ou pointe.....	62
VII : La courbe à trisécantes ordinaires est tracée sur une quadrique réglée.....	67
NOTE SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE. — Exemple de cubique gauche tracée sur deux cônes du second ordre.....	
	77



DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

Les équations aux dérivées partielles
linéaires du second ordre
de type hyperbolique.

Vu et approuvé :

Paris, le 10 Janvier 1940.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

G. ROUSSY.

